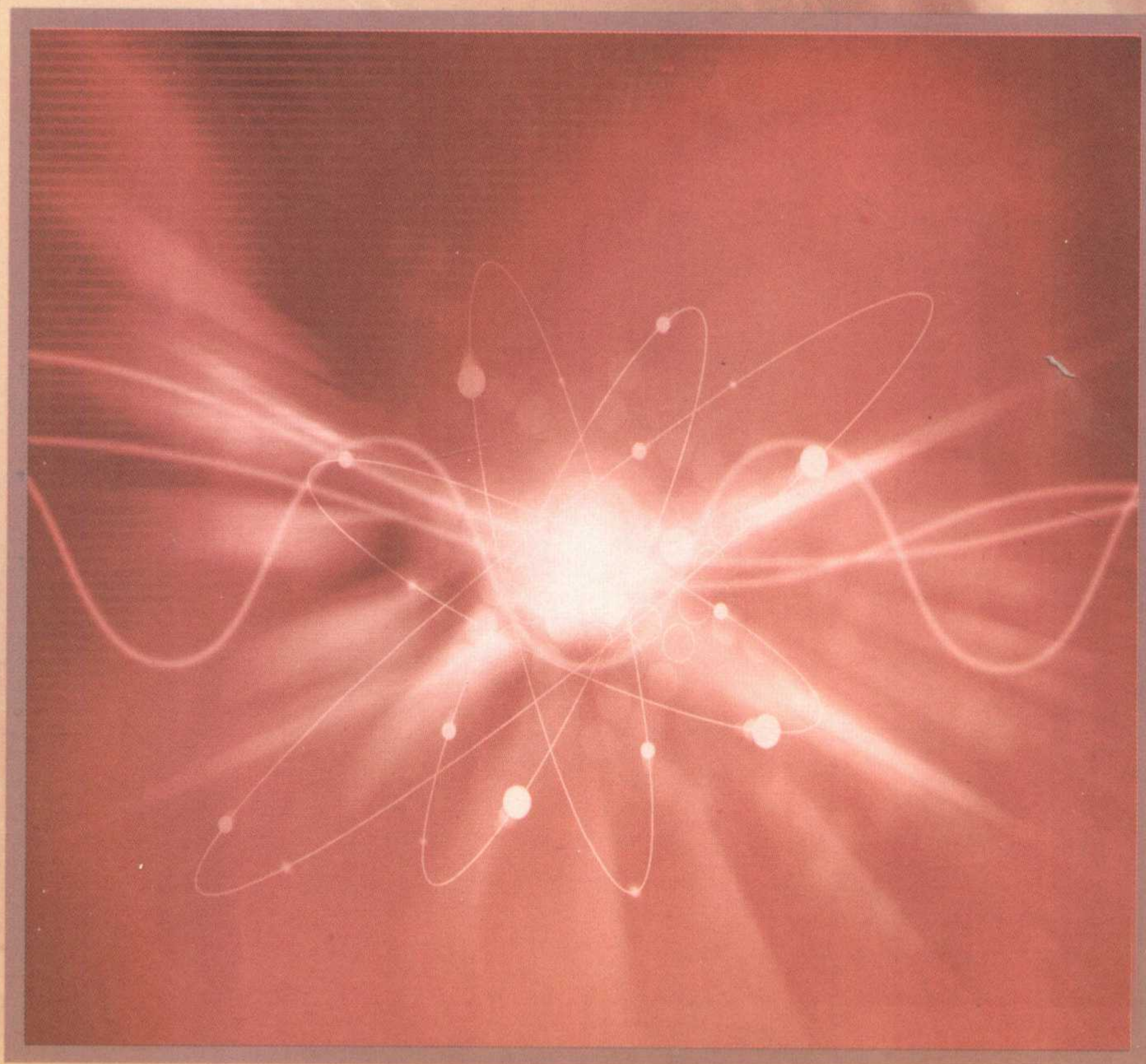


非线性控制系统 理论基础

李殿璞 编著



哈尔滨工程大学出版社

责任编辑 朱春元

封面设计 张 骏



ISBN 7-81073-862-3

定价:30.00 元

(工科院校博士研究生“十五”规划教材)

非线性控制系统理论基础

李殿璞 编著

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统理论基础/李殿璞编著. —哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2006
ISBN 7-81073-862-3

I. 非… II. 李… III. 非线性控制系统—理论—研究生—教材 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072955 号

内 容 简 介

本书介绍了非线性系统理论。非线性系统理论与线性系统理论相平行、相对应,但更具一般性。非线性系统理论建立在状态空间分析方法的基础上,所使用的主要数学工具是微分几何。微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效的和强有力的工具。本书内容由浅入深,概念清晰,理论严谨,深度适当,体系相对完整,侧重于系统地介绍基础理论,同时也兼顾实际应用。书中后一部分,从工程实用角度,深入地、仔细地分析了一些有通用性的实例,包括电机系统、单机和多机电力系统、机械手系统、飞行器系统(潜器和水下机器人系统)等。

本书是供研究生用的非线性几何理论的入门书,主要面向初涉足非线性理论领域的读者,为进一步提高和深入研究提供理论基础。

本书可作为工科院校相关学科博士研究生和硕士研究生的教材,也可供相关学科的科技工作者参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市东大直街 124 号
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 20.75 字数 499 千字

2006 年 9 月第 1 版

印数:1—1 000 册

定价:30.00 元

前 言

本教材系普通高等教育“十五”规划研究生重点教材。与线性系统理论相对应,本书的内容是非线性系统理论。和线性系统理论一样,非线性系统理论建立在状态空间分析方法的基础上。非线性系统理论所使用的主要数学工具是微分几何。微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效和强有力的工具,正如拉氏变换、复变函数理论和线性代数对于早期和近代的线性系统理论一样。鉴于微分几何方法对于研究非线性系统理论的重要性,和至今尚缺少一本研究生所需要的非线性几何理论的入门教材的现状,为此提供一本由浅入深,概念清晰,理论严谨,侧重于系统地介绍基础理论,同时也兼顾实际应用,深度适当,体系相对完整的教材是十分必要的。同时也要能适应读者进一步进修提高和深入研究的需要,有助于提高读者文献阅读能力,及有助于初涉非线性理论领域的其它方面的广大读者进行自学的需要。本书就是为适应这一需要而奉献给广大研究生和相关领域的科技工作者朋友的。

本书大体上分为四部分。第1章至第5章是微分拓扑和微分几何基本概念和数学基础,重点介绍切向量、对偶向量、切空间、对偶空间、向量场、对偶向量场、李导数、李积、李括号、李代数、不变分布、不变最小分布等基本概念;第6章至第10章讨论非线性控制系统的基本性质,给出非线性系统能控性、能观测性、可积性和基于这些性质的系统能控和能观性分解,包括局部分解、全局分解和输入输出解耦;第11章至第19章是单入单出非线性系统的精确线性化理论,包括非线性系统坐标变换、相对阶、状态反馈理论、零动态、系统渐近稳定性分析、扰动解耦和前馈控制、状态观测器理论,并给出了若干工业控制应用实例;第20章至第24章是多人多出非线性系统的精确线性化理论,把前面的第11章至第19章的内容扩展至多人多出非线性系统,给出了潜器、飞行器姿态控制和电力系统励磁、多杆件机械手等方面的多人多出非线性系统工业控制应用实例。上述四个部分还可以进一步概括为两大部分,即第1章至第10章的基础理论部分和第11章至第24章的实用部分。全书构成基本完整的体系。

本教材可根据教学要求选择不同的教学实施方案。理论和实用全面完整的教学实施约需54至72学时。讲授次序是第1章至第24章,也可适当省去一些章节,有些章节可以课后阅读。侧重理论的教学实施可省去第15章至第19章和第22章至第24章的内容。侧重应用的教学实施可省去第5章、第6章的6.2节和6.3节以及第8章至第10章的内容。以上两教学实施方案约需54学时。理论和实用兼顾的一般要求的基础教学可只讲授第1章至第4章、第6章的6.1节和6.4节、第7章、第11章至第14章、第19章至第21章,约需36学时。

哈尔滨工业大学赵长安教授对本书原稿进行了认真的审阅,提出了一些很有价值和切实的改进意见,在此表示深切的谢意。本书的出版得到了刘胜、彭侠夫同志和研究生院各位领导同志的大力支持,也得到了全国高校教材委员会编审组同志的积极协助,谨此致谢!

由于编著者的学识所限,写作时间紧迫,难免有差错和不当之处,尚请读者批评指正,不

吝赐教。

说明：本书中矩阵、向量俯拾皆是，考虑到版面的美观性和读者的层次水平，以不采用黑体表示为宜，故直接使用白体。

编著者

2005 年 12 月



目 录

第 1 章	切向量和对偶向量	1
1.1	切向量和切空间	1
1.2	对偶向量和对偶空间	3
1.3	切向量和对偶向量的映射公式	6
第 2 章	向量场和对偶向量场	14
2.1	向量场	14
2.2	向量场的李代数结构	19
2.3	对偶向量场	21
2.4	与向量场和对偶向量场有关的计算公式	23
第 3 章	分布和对偶分布	26
3.1	分布	26
3.2	对偶分布	32
3.3	正交对偶分布和正交分布	34
第 4 章	不变分布和不变对偶分布	36
4.1	不变分布	36
4.2	不变对偶分布	38
第 5 章	不变最小分布和不变最小对偶分布	40
5.1	不变最小分布	40
5.2	不变最小对偶分布	44
第 6 章	非线性系统的能控能观性和坐标变换	49
6.1	非线性系统的状态空间描述	49
6.2	非线性系统的能控性	51
6.3	非线性系统的能观测性	54
6.4	非线性系统的坐标变换	57
第 7 章	非线性系统状态方程的可积性	63
7.1	用分布的零化子研究分布的可积性	63
7.2	分布可积的充要条件——Frobenius 定理	66
第 8 章	控制系统的局部能控能观性分解	77
8.1	向量场和对偶向量场变换后向量形式的简化	77
8.2	基于不变分布的控制系统局部能控性分解	80
8.3	基于不变分布的控制系统局部能观性分解	84
8.4	控制系统的不变最小分布和局部能控性分解定理	87
8.5	控制系统的不变最小对偶分布和局部能观性分解定理	96
第 9 章	控制系统的全局分解	101

9.1	最大积分子流形	101
9.2	用最小子代数相当的分布代替不变最小分布	107
9.3	控制系统的全局能控性分解	110
9.4	用最小子空间相当的对偶分布代替不变最小对偶分布	113
9.5	控制系统的全局能观性分解	116
第 10 章	输入输出解耦	122
10.1	输出对输入的不变性	122
10.2	输出对输入的解耦	126
第 11 章	单入单出系统的坐标变换和部分线性化	128
11.1	单入单出系统的相对阶	128
11.2	基于线性化坐标 $L_f^k h(x^0)$ 的坐标变换映射	131
11.3	系统通过坐标变换达到部分线性化	137
第 12 章	单入单出系统的状态反馈精确线性化	144
12.1	状态反馈线性化的一些基本问题	144
12.2	状态反馈精确线性化的充要条件	152
12.3	状态反馈精确线性化的必要条件	154
12.4	按 $r = n$ 要求选择输出函数的状态反馈精确线性化	155
12.5	系统线性近似式和精确线性化问题可解性的关系	158
12.6	相对阶 $r < n$ 系统的部分反馈线性化	160
12.7	反馈线性化时的相对阶最大化问题	164
12.8	不当输出函数被给定情况下的完全线性化问题	168
第 13 章	零动态特性	170
13.1	非线性系统的零输出问题	170
13.2	线性系统的零输出问题	174
13.3	非线性系统零动态特性的线性近似	178
13.4	非线性系统的准确跟踪指定输出问题	180
第 14 章	局部渐近稳定性	183
14.1	非线性系统的局部渐近稳定性问题	183
14.2	非线性系统稳定性的线性近似式分析法	183
14.3	局部渐近稳定的临界问题	188
14.4	渐近稳定性分析中的空输出和变量捆绑技巧	192
第 15 章	渐近跟踪指定输出问题	195
15.1	渐近跟踪指定输出函数	195
15.2	渐近跟踪参考模型输出	198
第 16 章	扰动解耦问题和前馈控制	202
16.1	输出与扰动解耦问题	202
16.2	扰动可度量时的前馈控制	206
第 17 章	用高增益输出反馈实现局部渐近稳定	208
17.1	相对阶为 1 情况下的输出反馈	208
17.2	相对阶较大情况下的输出反馈	210

第 18 章	非线性系统全维状态观测器	213
18.1	观测器线性化问题	213
第 19 章	单入单出非线性系统精确线性化举例	224
19.1	直流电机传动控制	224
19.2	单杆件机械手	227
19.3	单机无穷大电力系统的励磁控制	232
第 20 章	m 入 m 出系统的坐标变换和部分线性化	237
20.1	m 入 m 出系统的相对阶	237
20.2	基于线性化坐标 $L_f^k h_i(x^0)$ 的坐标变换映射	238
20.3	系统通过坐标变换达到部分线性化	241
20.4	m 入 m 出系统的零输出问题	243
20.5	m 入 m 出系统的准确跟踪指定输出问题	245
第 21 章	m 入 m 出系统的状态反馈线性化	247
21.1	m 入 m 出系统的状态反馈	247
21.2	状态空间精确线性化问题可解的充要条件	249
21.3	相对阶 $r = n$ 的 m 入 m 出系统的状态反馈线性化	257
21.4	相对阶 $r < n$ 的 m 入 m 出系统的外部线性化	262
21.5	相对阶 $r \leq n$ 的 m 入 m 出系统的解耦	263
21.6	m 入 m 出系统的渐近稳定性	265
第 22 章	输入输出维数不等的多入多出系统	267
22.1	输入维数大于输出维数的多入多出系统	267
22.2	输入维数大于输出维数系统的非交互控制	271
第 23 章	多入多出非线性系统精确线性化举例	273
23.1	刚体姿态控制(潜器、飞行器姿态控制)	273
23.2	多机电力系统励磁控制精确线性化	277
第 24 章	通过动态扩充改变相对阶	284
24.1	动态反馈控制	284
24.2	动态扩充算法	286
24.3	动态扩充的阶段分解定理	290
24.4	动态扩充算法举例——飞行器控制	291
24.5	多杆件机械手	305
索引	317
参考文献	321

第 1 章 切向量和对偶向量

本章介绍微分拓扑和微分几何的一些基本知识和基本概念。前两节讲述光滑流形、光滑映射、切向量、切空间、对偶向量、对偶空间、正交对偶向量、全微分对偶向量、零化子等概念。1.3 节重点介绍切向量映射和对偶向量映射的定义和有关映射公式,后者包括切向量映射的局部坐标表示和向量表示、对偶向量映射的局部坐标表示和向量表示。本书第 1 章至第 5 章为后续各章提供数学基础。

1.1 切向量和切空间

1.1.1 切向量

在定义切向量之前,让我们先给出光滑函数的定义。

定义 1.1 设 A 是 R^n 的一个开子集, $f: A \rightarrow R$ 是一个函数。 f 在点 $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ 的值记为 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 。如果 f 对 x_1, \dots, x_n 的任意阶偏导数存在且连续,则称函数 f 是 C^∞ 类函数 (function of class C^∞), 简称 f 是 C^∞ 的或 f 是光滑函数 (smooth function)。如果函数 f 是 C^∞ 的, 且对每点 $x^0 \in A$, 存在 x^0 的一个邻域 U , 使对所有 $x \in U$, f 在 x^0 的 Taylor 级数展开式都收敛到 $f(x)$, 则称 f 是 C^ω 的或 f 是解析函数 (analytic function)。

定义 1.2 一流形 N 上有定义的所有光滑函数的集合, 记为 $C^\infty(N)$ 。在流形 N 上一点 p 邻域有定义的所有光滑函数的集合, 记为 $C^\infty(p)$ 。

定义 1.3 设 N 是一个 n 维光滑子流形, $C^\infty(p)$ 是在 N 上 p 点有定义的光滑函数集合, $v: C^\infty(p) \rightarrow R$ 是定义在 $C^\infty(p)$ 上的泛函 (算子), v 有下列性质 (也称求导性质)。

1. 线性性

$$\begin{aligned} v(\lambda + \gamma) &= v(\lambda) + v(\gamma) & \forall \lambda, \gamma \in C^\infty(p) \\ v(a\lambda) &= av(\lambda) & \forall a \in R, \lambda \in C^\infty(p) \end{aligned} \quad (1-1)$$

2. 符合 Leibnitz 规则

$$v(\lambda\gamma) = \gamma(p)v(\lambda) + \lambda(p)v(\gamma) \quad (1-2)$$

则称 v 是 N 在某点 p 的一个切向量 (tangent vector)。

下面对定义 1.1 至 1.3 作一些概念性说明。

1. 流形是拓扑学和微分几何中的重要概念。不过, 为不涉及过多的数学基础, 此处不准备作严格的定义。从概念上说, n 维流形可理解为由多个同为 n 维的曲面 (或超曲面) 经拼接所得到的曲面 (或超曲面)。

2. 流形的一个特征, 是它的各局域可以与 n 维欧氏空间之间建立起点与点间的一对一映射关系, 并可据此建立起适用于各局部的流形局部坐标系。

3. 具有微分结构的流形被称为微分流形。这种微分结构,是指参与拼接的曲面(或超曲面)彼此拼接得是如此之好,以至于流形作为一整体与 n 维欧氏空间之间的映射能达到任意次可微的程度,即达到光滑的程度。因此微分流形也称为光滑流形或简称流形。微分流形可理解为是由多个同为 n 维的光滑曲面(或超曲面)经拼接所得到的光滑曲面(或超曲面),也就是有任意阶导数的 n 维曲面(或超曲面)。

4. 定义在流形 N 上的光滑函数 $\lambda(p)$ 就是定义在流形 N 的局部坐标系上的函数,其各阶导数都存在。

5. 光滑函数 $\lambda(p)$ 在某方向上的变化率,一般称为方向导数。方向导数取值是一实数。算子 v 表示求方向导数的操作,故其映射关系可表示为 $v: C^\infty(p) \rightarrow R$ 。

6. 求导的方向在函数 $\lambda(p)$ 的定义域上表示,即指的是流形局部坐标平面(或超平面)上定的方向,而不是指在 $\lambda(p)$ 曲面的切平面(或超平面)上定的方向。

切向量和方向导数有密切关系,但这是两个不同的概念。切向量被定义为一个抽象的泛函(算子),是 $C^\infty(p)$ 至欧氏空间 R 的一个映射,而方向导数则是该映射的像值。下面用一个例子做具体的解释。

例 1.1 (流形 R^n 上的切向量) 设 $\lambda(x)$ 是定义在 R^n 上的 C^∞ (光滑) 函数, $\lambda(x)$ 在点 x 的方向导数(即 $\lambda(x)$ 在指定方向上的变化率) 定义为

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)_x \quad (1-3)$$

式中, v_i 是表方向的系数。如果把式(1-3)改写成

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)_x &= \left(\sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right) \lambda(x_1, \dots, x_n) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_x}_{\text{切向量的基底}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{\text{方向向量}} \underbrace{\lambda(x_1, \dots, x_n)}_{\text{光滑函数}} = v(\lambda(x)) \end{aligned} \quad (1-4)$$

切向量

可见方向导数可拆成三部分。方向导数的前面两部分,即切向量的基底和方向向量称为切向量。此切向量完全符合式(1-1)和式(1-2)的切向量定义。

方向的表示方法一般有两种。一种是用方向余弦向量 $[\cos \alpha_1 \cdots \cos \alpha_n]^T$, 另一种是用方向数向量 $[v_1 \cdots v_n]^T$ 。切向量的方向一般都用后一种表示。方向数向量归一化后,等于方向余弦向量。也可以说方向数向量等于方向余弦向量外乘一个常数。该常数表示向量的长度或大小。所以通常所说的方向向量不仅指方向,还包括其长度。切向量的方向和大小都是点的函数。在不同点上,不仅方向可能不同,外乘的常数(向量的长度)也可能不同。

此外,还应特别提请读者注意的是,在后续章节中,在很多情况下,可能只谈方向,不问基底。这时谈及的切向量往往是专指方向向量。

1.1.2 切空间

定义 1.4 子流形 N 上定义在 p 点的所有切向量 v 的集合,记为 $T_p N$ 。

有必要再次向读者强调, p 点是在流形的局部坐标平面(或超平面)上,而不是在函数

$\lambda(p)$ 的切平面(或超切平面)上。各切向量 v 是指在流形的局部坐标平面(或超平面)上的切向量,而不是指 $\lambda(p)$ 的切平面(或超切平面)上的切向量。

定义 1.5 在集合 $T_p N$ 上定义“加”和“数乘”运算为

$$\begin{aligned}(v_I + v_{II})(\lambda) &= v_I(\lambda) + v_{II}(\lambda) & \forall v_I, v_{II} \in T_p N \\ (av_I)(\lambda) &= av_I(\lambda) & \forall a \in R, \forall v_I \in T_p N\end{aligned}\quad (1-5)$$

定义两种运算之后,就构成了线性空间 $T_p N$,称它为 N 上 p 点的切空间(tangent space)。

定义 1.6 $\left. \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right|_p$ 被称为切空间 $T_p N$ 的一组基底(bases)。

在此基底下,切空间 $T_p N$ 中的切向量可一般地表示为

$$v = v_1 \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right|_p + \dots + v_n \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right|_p = \left(\left. \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right|_p \dots \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right|_p \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

在定义 1.6 中, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 表示流形 N 上 p 点附近的局部坐标。如上面强调的,切空间自然处于流形局部坐标平面(或超平面)上,而不是在函数 $\lambda(p)$ 的切平面(或超平面)上。

1.2 对偶向量和对偶空间

1.2.1 切向量的对偶向量

定义 1.7 $T_p N$ 是一个 n 维线性空间,在此空间上定义一个实线性泛函(算子)

$$v^* : T_p \rightarrow R$$

线性是指它满足

$$v^*(av_a + bv_b) = av^*(v_a) + bv^*(v_b) \quad \forall v_a, v_b \in T_p N \quad \forall a, b \in R \quad (1-7)$$

此 v^* 被称为(空间 $T_p N$ 中所有切向量的)对偶向量(covector)。

按此定义,所谓对偶向量,就是能使一个 n 维切向量变换为一个实数的同维向量。这里读者会想到两个同维向量做点积可以得到一个实数的事实,所以对偶向量可理解为所有能与切向量做点积的同维向量。

1.2.2 切空间的对偶空间

定义 1.8 子流形 N 上 p 点有定义的所有对偶向量的集合记为 T_p^* 。

定义 1.9 在集合 T_p^* 上定义“加”和“数乘”运算:

$$\begin{aligned}(v_1^* + v_2^*)(v) &= v_1^*(v) + v_2^*(v) & \forall v_1^*, v_2^* \in T_p^* \\ (av_1^*)(v) &= av_1^*(v) & \forall a \in R, \forall v_1^* \in T_p^*\end{aligned}\quad (1-8)$$

定义两种运算之后,构成了实线性空间 $T_p^* N$,称它为 N 上 p 点切空间 T_p 的对偶空间(cotangent space)。

1.2.3 对偶空间的基底

定理 1.1 n 维切空间 T_p 的线性对偶空间 T_p^* 是 n 维的。

此定理的成立是显然的,如不同维,则在任何情况下都不可能满足对偶的定义 $v^*: T_p \rightarrow R$ 。

定义 1.10 设 $d\varphi_1|_p, \dots, d\varphi_n|_p$ 是对偶空间的一组基底,如果它满足

$$d\varphi_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p \right) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (1-9)$$

则称 $d\varphi_1|_p, \dots, d\varphi_n|_p$ 是切空间基底 $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \Big|_p$ 的一组对偶基(dual bases)。

在定义 1.10 中, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 表示流形 N 上 p 点附近的局部坐标。另外应提请读者注意的是,在本书的讨论中,以后凡提到对偶空间基底,都无例外地指的是对偶基,满足式(1-9)。

在对偶基下,空间 T_p^*N 中的对偶向量可一般地表示为

$$v^* = v_1^* d\varphi_1|_p + \dots + v_n^* d\varphi_n|_p = (v_1^* \dots v_n^*) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{bmatrix}_p \quad (1-10)$$

因为

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Big|_p + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \Big|_p = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \dots \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right)_p \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

定义在切空间 T_pN 上的泛函(算子)运算

$$v^*(v) = (v_1^* d\varphi_1|_p + \dots + v_n^* d\varphi_n|_p)(v) \quad (1-11)$$

$$\begin{aligned} &= (v_1^* \dots v_n^*) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{bmatrix}_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \dots \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right)_p \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right) \\ &= (v_1^* \dots v_n^*) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) & \dots & d\varphi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ d\varphi_n \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) & \dots & d\varphi_n \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= v_1^* v_1 + \dots + v_n^* v_n = \langle v^*, v \rangle \end{aligned} \quad (1-12)$$

式(1-12)表明,对偶向量 v^* 对切向量 v 的泛函运算,是两个有不同基底的向量间的运算,其运算结果等于两方向向量的点积。

作为上式的一些退化情况,这里给出两个退化公式:

1. 如果切向量 $v = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 1)^T$, 仅第 i 个分量 $v_i = 1$, 则由上式得

$$v^* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \right) = v_i^* \quad (1-13)$$

2. 如果对偶向量 $v^* = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$, 仅第 i 个分量 $v_i^* = 1$, 则由上式得

$$d\varphi_i|_p(v) = v_i \quad (1-14)$$

1.2.4 正交对偶向量

定义 1.11 切向量 v 和对偶向量 v^* 相互间满足正交条件

$$v^*(v) = \langle v^*, v \rangle = [v_1^* \cdots v_n^*] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1^* v_1 + \cdots + v_n^* v_n = 0 \quad (1-15)$$

时,称该对偶向量 v^* 是正交对偶向量(orthogonal covector)或零化对偶向量(annihilative covector)。

1.2.5 全微分对偶向量

一个对偶向量的方向向量 $(v_1^* \cdots v_n^*)$,除必须与切向量同维外,其选择是很自由的,可以有多种选择。注意到某函数 $\lambda(\varphi)$ 的全微分式

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \cdots + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n} d\varphi_n$$

方向向量 $(v_1^* \cdots v_n^*)$ 的一种可能的选择是 $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n}\right)$ 。这导致下面的定义。

定义 1.12 设 $\lambda(\varphi)$ 是定义在流形 N 上 p 点邻域的一个光滑函数。依托于 $\lambda(\varphi)$ 的对偶向量

$$v^* = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n}\right) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{bmatrix}_p \quad (1-16)$$

被称为全微分对偶向量(exact differential covector),并记为 $d\lambda|_p$,即

$$d\lambda|_p = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n}\right) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{bmatrix}_p \quad d\lambda|_p \in T_p^* \quad (1-17)$$

注意到,在流形的局部坐标系 $\varphi = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)^T$ 下, $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n}\right)$ 正是函数 $\lambda(\varphi)$ 的梯度方向,因此全微分对偶向量的方向正是函数 $\lambda(\varphi)$ 的梯度方向。

由上面的全微分对偶向量定义,可推导出以下的一些性质。

性质 1 式(1-12)是对所有对偶向量都成立的性质,自然对于全微分对偶向量也成立。设 v 是一个切向量,则

$$d\lambda|_p(v) = \langle d\lambda|_p, v \rangle \quad (1-18)$$

性质 2 设 $\lambda(\varphi)$ 是一个光滑函数, v 是一个切向量,则

$$d\lambda|_p(v) = v(\lambda) \quad (1-19)$$

证明 由全微分对偶向量定义和切向量定义,

$$d\lambda|_p(v) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n}\right) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{bmatrix}_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\right)_p \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right)$$

由式(1-12)和切向量定义知

$$d\lambda|_p(v) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_n}\right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} (\lambda) = v(\lambda)$$

性质 3 联合性质 1 和性质 2, 得

$$\langle d\lambda|_p, v \rangle = v(\lambda) \quad (1-20)$$

即全微分对偶向量 $d\lambda$ 与切向量 v 的点积, 等于函数 λ 在 v 方向的方向导数。

例 1.2 (二基底的点积等于 δ 函数) 设 $\lambda = \varphi_i, v = \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p$, 其中 φ_i, φ_j 是流形局部坐标。代入式(1-18), 并注意到式(1-9), 得

$$d\varphi_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p \right) = \langle d\varphi_i|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p \rangle = d\varphi_i|_p \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (1-21)$$

例 1.3 (基底间的对偶关系) 设 $\lambda = \varphi_i, v = \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p$, 代入式(1-19), 注意到式(1-9), 得

$$d\varphi_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p (\varphi_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (1-22)$$

式(1-21)和(1-22)清楚地表明了切空间和对偶空间基底间的对偶关系和运算关系。

性质 4 (式(1-13)和(1-14)在全微分对偶情况下的推论) 设 $v^* = d\lambda|_p, v = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p$, 代入式(1-13)得

$$d\lambda|_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \right) = (d\lambda|_p)_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} \Big|_p \quad (1-23)$$

又设 $\lambda = \varphi_i$, 即 $v^* = d\lambda|_p = d\varphi|_p$, 代入式(1-12), 得与式(1-14)同样结果

$$d\varphi_i|_p(v) = v_i \quad (1-24)$$

1.3 切向量和对偶向量的映射公式

1.3.1 切向量的映射

1.3.1.1 切向量映射的定义

一个切向量 v 定义在流形 N 某点 p 上, 当流形做指定映射 F , 由 N 向 M 映射时, 流形 N 上 p 点被映射到流形 M 的 $q = F(p)$ 点上。那么切向量 v 应如何映射呢? 下面给出映射公式。映射后的切向量应定义在点 $q = F(p)$ 上。映射公式将以映射定义的形式给出, 其表达如下面的定义 1.13。

在定义之前, 先约定一个函数在变换前后的符号表示。一函数在映射前定义在点 p 邻域, 以 x 为自变量, 记为 $\lambda_p(p)$, 映射后定义在点 q 邻域, 以 y 为自变量, 记为 $\lambda_q(q)$, 其间的函数变换关系是 $\lambda_p(p) = \lambda_q(q) \circ F(p) = \lambda_q(F(p))$ 。

定义 1.13 设 N 和 M 是两个光滑流形(见图 1-1)。 $F: N \rightarrow M$ 是一个光滑映射, $p \in N$ 点的像是 $q = F(p) \in M$ 。设 v 是定义在点 p 的切向量, 即 $v \in T_p N$ 。映射前后互为对应的二函数 $\lambda_p: N \rightarrow R$ 和 $\lambda_q: M \rightarrow R$, 满足 $\lambda_p(p) = \lambda_q(q) \circ F(p)$, 并且 $\lambda_p \in C^\infty(p)$ 和 $\lambda_q \in C^\infty(q)$ 。切向量 v 到其像向量 w 的映射定义为

$$F_*: T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

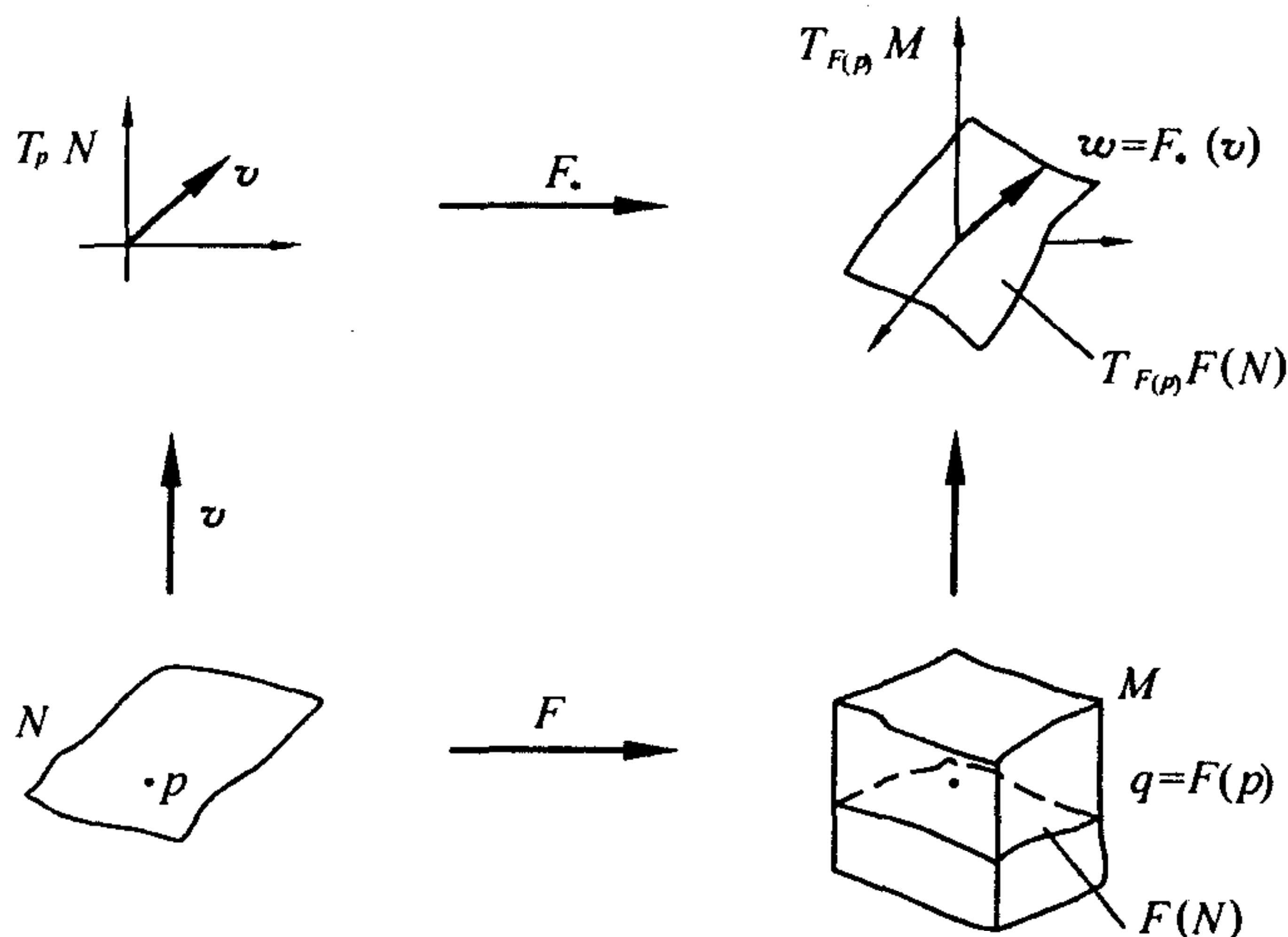


图 1-1 切向量的映射

$$F_*(v(\lambda_p(p))) = v(\lambda_q \circ F(p))$$

或简写为

$$F_*(v(\lambda_p)) = v(\lambda_q \circ F) \quad (1-25)$$

定义中 v 是切空间 $T_p N$ 中的一个切向量, $w = F_*(v)$ 是切向量 v 的像, 它是切空间 $T_{F(p)} F(N)$ 中的一个切向量。 F_* 把 N 中点 p 的切向量 v 映射为 $F(N)$ 中点 q 的切向量 $w = F_*(v)$ 。

1.3.1.2 切向量映射的局部坐标表示

下面推导中总的思路走向是, 要提出和消去函数 λ 和最终求得流形 M 坐标下的切向量 w 。

首先, 约定映射 $F: N \rightarrow M$ 的局部坐标表示。设点 $p \in N$ 的局部坐标用 x 表示, 点 $q \in M$ 的局部坐标用 y 表示, 则映射 $F: N \rightarrow M$ 在点 p, q 邻域的局部坐标表示是 $y = F(x)$ 。

其次, 把 $F_*(v(\lambda))$ 分解为 n 个分量, 即推导式(1-27)。把 $\lambda_q \circ F(x)$, 即 $\lambda_q(F(x))$, 写入式(1-4)的 λ 的位置, 可知下式应当成立

$$F_*(v(\lambda_p)) = v(\lambda_q \circ F) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial(\lambda_q \circ F)}{\partial x_i} \Big|_x \quad (1-26)$$

当 v 只含第 i 个分量, 即 $v = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ 时, 此式最右端只有第 i 个分量 $v_i = 1$, 其余均为零, 上式变化为

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\lambda_p) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\lambda_q \circ F) = \frac{\partial(\lambda_q \circ F)}{\partial x_i} \Big|_x$$

再把所得结果代回式(1-26)的右端得

$$F_*(v(\lambda_p)) = \sum_{i=1}^n v_i F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\lambda_p) \right) \quad (1-27)$$

再次, 求 $F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\lambda_p) \right)$ 的局部坐标表示。先求其第 i 个分量的局部坐标表示。注意 $y = F(x)$, 并假设流形 M 为 m 维, 得

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\lambda_p) \right) = \frac{\partial(\lambda_q \circ F)}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \lambda_q}{\partial y_j} \Big|_{y=F(x)} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x$$

或省去 λ_p 和 λ_q 写成

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{y=F(x)}$$

最后,把此结果代回式(1-27),得 $F_*(v)$ 的局部坐标表示为

$$\begin{aligned} w = F_*(v) &= \sum_{i=1}^n v_i F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{y=F(x)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{y=F(x)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x v_i \right) \end{aligned} \quad (1-28)$$

1.3.1.3 切向量映射的矩阵和向量表示

切向量映射 $w = F_*(v)$ 左端切向量 w 的局部坐标表示是

$$w = \sum_{i=1}^m w_i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{y=F(x)}$$

另一方面, $F_*(v)$ 可表示为式(1-28)。把 $w = F_*(v)$ 两端都写成矩阵形式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_m} \right)_{y=F(x)} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_m} \right)_{y=F(x)} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

或简化为

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

最后得切向量映射 $w = F_*(v)$ 的矩阵表示是

$$w = J_F \Big|_x v \quad (1-30)$$

其中

$$J_f \Big|_x = \frac{\partial F}{\partial x^T} \Big|_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x \quad (1-31)$$

是流形映射 $y = F(x)$ 在点 x 处的 Jacobi 矩阵。

1.3.2 切向量向 R 切方向的映射

1.3.2.1 定义

本节(1.3.2节)是1.3.1节的一个特例,是流形 M 退化为一维欧氏空间 R ,即像空间由 m 维变为1维时的情况。

设有一个切向量 v 定义在流形 N 某点 p 上,当流形做指定函数映射 λ ,由 N 向 R 映射

时,流形上 R 点被映射到 R 的 $q = \lambda(p)$ 点上得到一实数值。那么切向量 v 应如何映射呢? 映射后得到 R 上的一个切向量。映射公式将以映射定义的形式给出,见下面的定义 1.14。

在定义之前,先约定一个函数在变换前后的符号表示。一函数在映射前定义在点 p 邻域,以 x 为自变量,记为 $\mu_p(p)$,映射后定义在点 q 邻域,以 y 为自变量,记为 $\mu_q(q)$,其间的函数变换关系是 $\mu_p(p) = \mu_q(q) \circ \lambda(p) = \mu_q(\lambda(p))$ 。

定义 1.14 设 N 是一个光滑流形, $\lambda: N \rightarrow R$ 是一个光滑函数映射, v 是定义在点 p 的切向量,即 $v \in T_p N$ 。映射前后互为对应的两个函数 $\mu_p: N \rightarrow R$ 和 $\mu_q: M \rightarrow R$, 满足 $\mu_p(p) = \mu_q(q) \circ \lambda(p)$, 并且 $\mu_p \in C^\infty(p)$ 和 $\mu_q \in C^\infty(q)$ 。切向量 v 向 R 切方向的映射定义为

$$\begin{aligned}\lambda_*: T_p N &\rightarrow T_{\lambda(p)} R \\ \lambda_*(v(\mu_p(p))) &= v(\mu_q \circ \lambda(p))\end{aligned}$$

或简写为

$$\lambda_*(v(\mu_p)) = v(\mu_q \circ \lambda) \quad (1-32)$$

定义中 v 是切空间 $T_p N$ 中的一个切向量, $w = \lambda_*(v)$ 是切向量 v 的像。 w 是切空间 $T_{\lambda(p)} R$ 中的一个切向量。 λ_* 把 N 中点 p 的切向量 v 映射为 R 中点 $q = \lambda(p)$ 的切向量 $w = \lambda_*(v)$ 。

1.3.2.2 切向量向 R 切方向映射的局部坐标表示

首先,约定函数映射 $\lambda: N \rightarrow R$ 的局部坐标表示。设点 $p \in N$ 的局部坐标用 x 表示,点 $q \in R$ 的局部坐标用 y 表示,则函数映射 $\lambda: N \rightarrow R$ 在点 p, q 邻域的局部坐标表示是 $y = \lambda(x)$ 。

其次,把 $\lambda_*(v(\mu_p))$ 分解为 n 个分量,即推导式(1-34)。把 $\mu_q \circ \lambda(x)$, 即 $\mu_q(\lambda(x))$, 写入式(1-4)的 λ 的位置,有

$$\lambda_*(v(\mu_p)) = v(\mu_q \circ \lambda) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial(\mu_q \circ \lambda)}{\partial x_i} \Big|_x \quad (1-33)$$

当 v 只含第 i 个分量,即 $v = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ 时,此式最右端只有第 i 个分量 $v_i = 1$, 其余全为零,上式变化为

$$\lambda_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\mu_p) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\mu_q \circ \lambda) = \frac{\partial(\mu_q \circ \lambda)}{\partial x_i} \Big|_x$$

再把所得结果代回式(1-33)的右端得

$$\lambda_*(v(\mu_p)) = \sum_{i=1}^n v_i \lambda_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\mu_p) \right) \quad (1-34)$$

再次,求 $\lambda_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\mu_p) \right)$ 的局部坐标表示。按定义,并注意 $y = \lambda(x)$ 得

$$\lambda_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\mu_p) \right) = \frac{\partial(\mu_q \circ \lambda)}{\partial x_i} \Big|_x = \frac{d\mu_q}{dy} \Big|_{y=\lambda(x)} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \Big|_x$$

或写成

$$\lambda_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \Big|_x \frac{d}{dy} \Big|_{y=\lambda(x)}$$

最后,把此结果代回式(1-34),得 $\lambda_*(v)$ 的局部坐标表示

$$\lambda_*(v) = \sum_{i=1}^n v_i \lambda_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \sum_{i=1}^n \left(v_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \Big|_x \right) \frac{d}{dy} \Big|_{y=\lambda(x)} = v(\lambda(x)) \frac{d}{dy} \Big|_{y=\lambda(x)} \quad (1-35)$$

1.3.2.3 切向量向 R 切方向映射的向量表示

切向量映射 $w = \lambda_*(v)$ 左端切向量 w 的局部坐标表示是

$$w \frac{d}{dy} \Big|_{y=\lambda(x)}$$

另一方面, $\lambda_*(v)$ 可表示为式(1-35)。把 $w = \lambda_*(v)$ 两端都写成矩阵形式, 得

$$w \frac{d}{dy} \Big|_{y=F(x)} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right]_x \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \frac{d}{dy} \Big|_{y=F(x)}$$

或简化为

$$w = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right]_x \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

最后得切向量映射 $w = \lambda_*(v)$ 的矩阵表示是

$$w = J_\lambda \Big|_x v = v(\lambda) \Big|_x \quad (1-37)$$

其中

$$J_\lambda \Big|_x = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \Big|_x = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right]_x \quad (1-38)$$

是流形函数映射 $y = \lambda(x)$ 在点 p 处的 Jacobi 矩阵。

1.3.3 R 切向量的映射

1.3.3.1 定义

本节(1.3.3节)是1.3.1节的另一个特例, 是流形 N 退化为 R , 原像空间由 n 维变为1维时的情况。为符合惯例, 本小节将把空间 M 改称为 N , 把点 q 改称点 p , 把点 p 改称点 t , 把 y 改称 x , 把 x 改称 t , 把映射 F 改称为 σ , 成为 $\sigma: R \rightarrow N$ 的映射。

一个切向量 $v = \frac{d}{dt} \Big|_t$ 定义在 R 某点 t 上, 当流形做指定映射 σ 由 R 向 N 映射时, R 上 t 点被映射到流形 N 的 $p = \sigma(t)$ 点上。那么切向量应如何映射呢? 映射后的切向量应定义在点 $p = \sigma(t)$ 上。映射公式将以映射定义的形式给出, 其表达如下面的定义 1.15。

在定义之前, 先约定一个函数在变换前后的符号表示。一函数在映射前定义在点 t 邻域, 以 t 为自变量, 记为 $\lambda_t(t)$, 映射后定义在点 p 邻域, 以为 x 自变量, 记为 $\lambda_p(p)$, 其间的函数变换关系是 $\lambda_t(t) = \lambda_p(p) \circ \sigma(t) = \lambda_p(\sigma(t))$ 。

定义 1.15 设 N 是一个光滑流形, $\sigma: R \rightarrow N$ 是一个光滑映射, 点 $t \in R$ 映射后的像是 $p = \sigma(t) \in N$, $\frac{d}{dt} \Big|_t$ 是定义在点 t 的切向量。映射前后互为对应的两个函数 $\lambda_t: R \rightarrow R$ 和 $\lambda_p: N \rightarrow R$, 满足 $\lambda_t(t) = \lambda_p(p) \circ \sigma(t)$, 并且 $\lambda_t \in C^\infty(t)$ 和 $\lambda_p \in C^\infty(p)$ 。切向量 (d/dt) 到其像向量 w 的映射定义为

$$\begin{aligned} \sigma_*: T_t R &\rightarrow T_{\sigma(t)} N \\ \sigma_* \left(\left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \lambda_t(t) \right) &= \frac{d}{dt} (\lambda_p \circ \sigma(t)) \\ \text{或简写为} \quad \sigma_* \left(\left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \lambda_t \right) &= \frac{d}{dt} (\lambda_p \circ \sigma) \end{aligned} \quad (1-39)$$

式中, $w = \sigma_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right)$ 是切向量 $\frac{d}{dt} \Big|_t$ 的像, 它是切空间 $T_{\sigma(t)} N$ 中的一个切向量。 σ_* 把 R 中

点 t 的切向量 $\left. \frac{d}{dt} \right|_t$ 映射为 N 中点 p 的切向量 $w = \sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right)$ 。

1.3.3.2 R 切向量映射的局部坐标表示

首先, 约定映射 $\sigma: R \rightarrow N$ 在点 t 的局部坐标表示。设点 $t \in R$ 的局部坐标用 t 表示, 点 $p \in N$ 的局部坐标用 x 表示, 则映射 $\sigma: R \rightarrow N$ 的局部坐标表示是 $x = \sigma(t)$ 。

然后, 给出 $\sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t (\lambda_t) \right)$ 的局部坐标表示。按定义, 并注意 $x = \sigma(t)$, 得

$$\sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t (\lambda_t) \right) = \left. \frac{d(\lambda_p \circ \sigma)}{dt} \right|_t = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \lambda_p}{\partial x_j} \right|_{x=\sigma(t)} \left. \frac{d\sigma_j}{dt} \right|_t$$

或省去 λ_t 和 λ_p 写成

$$\sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{d\sigma_j}{dt} \right|_t \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{x=\sigma(t)} \quad (1-40)$$

1.3.3.3 R 切向量映射的向量表示

切向量映射 $w = \sigma_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \right)$ 左端 w 的局部坐标表示是

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{x=\sigma(t)} \right)$$

注意到式(1-40), 把 $w = \sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right)$ 两端都写成矩阵形式得

$$w = \sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{x=\sigma(t)} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{x=\sigma(t)} \begin{bmatrix} \left. \frac{d\sigma_1}{dt} \right|_t \\ \vdots \\ \left. \frac{d\sigma_n}{dt} \right|_t \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

或简化为

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{d\sigma_1}{dt} \right|_t \\ \vdots \\ \left. \frac{d\sigma_n}{dt} \right|_t \end{bmatrix}$$

最后得切向量映射 $w = \sigma_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right)$ 的矩阵表示式

$$w = J_\sigma \quad (1-42)$$

式中

$$J_\sigma = \left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_t = \begin{bmatrix} \left. \frac{d\sigma_1}{dt} \right|_t \\ \vdots \\ \left. \frac{d\sigma_n}{dt} \right|_t \end{bmatrix} \quad (1-43)$$

是映射 $x = \sigma(t)$ 在点 t 处的 Jacobi 矩阵。式(1-42)与式(1-30)和式(1-37)在形式上有所不同的原因是切向量的方向向量在这里是标量, 且其值 $v = 1$ 。

1.3.4 对偶向量的逆向映射

1.3.4.1 定义

一个切向量 v 定义在流形 N 某点 p 上, 当流形做 F 由 N 向 M 的指定映射时, 流形上 p 点被映射到流形 M 的 $q = F(p)$ 点上, 切向量 v 被映射为 $w = F_*(v)$ 。已知 w^* 是 w 的对偶向量, 问按映射关系, v 的对偶向量, 即 w^* 的原像 v^* , 如何确定? 下面给出逆向映射公式。所得对偶向量应定义在点 p , 属于 v 的对偶空间。逆向映射公式将以逆向映射定义的形式给出, 其表达如下。

定义 1.16 设 N 和 M 是两个光滑流形。 $F: N \rightarrow M$ 是一个光滑映射, 点 $p \in N$ 的像是 $q = F(p) \in M$ 。 v 是定义在点 p 的切向量, $v \in T_p N$ 。映射 $F_*: T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ 把 v 映射为 w 。 $T_p^* N$ 和 $T_{F(p)}^* M$ 分别是 $T_p N$ 和 $T_{F(p)} M$ 的对偶空间, $w^* \in T_{F(p)}^* M$ 。对偶向量 w^* 到对偶向量 v^* 的逆向映射定义为

$$F^*: T_{F(p)}^* M \rightarrow T_p^* N$$

$$F^*(w^*)(v) = w^*(F_*(v)) = w^*(w)$$

$$\text{或写为} \quad \langle F^*(w^*), v \rangle = \langle w^*, F_*(v) \rangle = \langle w^*, w \rangle \quad (1-44)$$

式中, $F^*(w^*)$ 是对偶向量 w^* 的原像 v^* , 它是对偶空间 $T_p^* N$ 中的一个对偶向量。 F^* 把 M 中的点 q 的对偶向量 w^* 逆向映射为 N 中点 p 的对偶向量 v^* 。

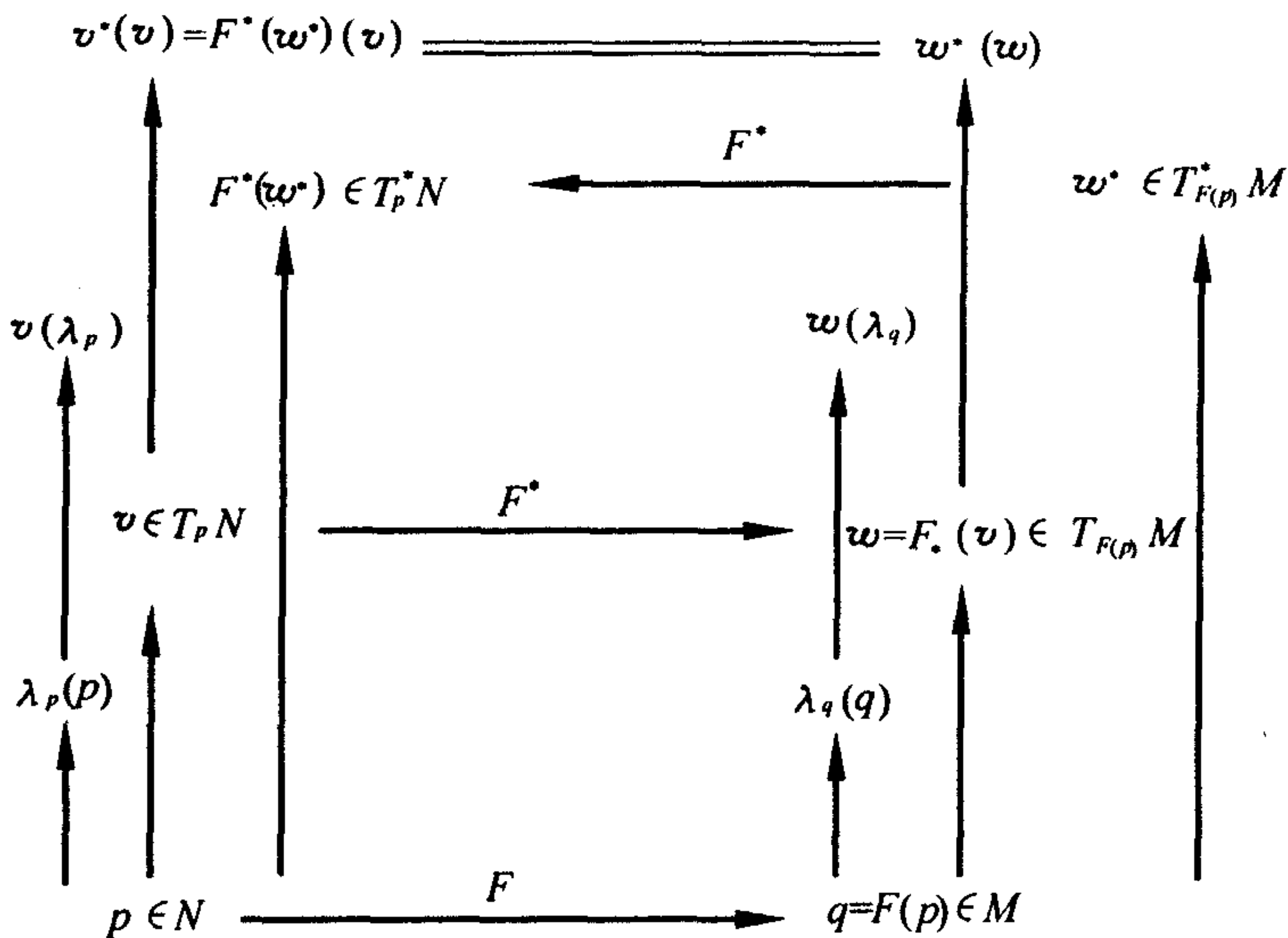


图 1-2 对偶向量的逆向映射

1.3.4.2 对偶向量逆向映射的局部坐标表示

下面的推导中, 总的思路走向是, 提出和消去切向量 v 和最终求得流形 N 坐标下的对偶切向量。

首先, 约定映射 $F: N \rightarrow M$ 在点 p 的局部坐标表示。设点 $p \in N$ 的局部坐标用 x 表示, 点 $q \in M$ 的局部坐标用 y 表示, 则映射 $F: N \rightarrow M$ 在点 p 的局部坐标表示是 $y = F(x)$ 。

其次, 求对偶向量逆向映射的局部坐标表示。其过程是, 先把 $F^*(w^*)(v)$ 定义式的右

端 $w^*(F_*(v))$ 拆为 m 个分量, 用式(1-28)把 $F_*(v)$ 展开, 再作 dy 和 $\partial/\partial y$ 间运算, 然后引入 dx_i 和 $\partial/\partial x_i$, 最后提出切向量 v 并变换为 x 坐标。全部过程如下。

$$\begin{aligned}
 F^*(w^*)(v) &= w^*(F_*(v)) = \sum_{j=1}^m w_j^* dy_j|_{y=F(x)}(F_*(v)) \\
 &= \sum_{j=1}^m w_j^* dy_j|_{y=F(x)} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_{y=F(x)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \Big|_x v_i \right) \right) = \sum_{j=1}^m w_j^* \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x v_i \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m w_j^* \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x dx_i|_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x v_i \right) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m (w_j^* \circ F) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x dx_i|_x \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x v_i \right) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m (w_j^* \circ F) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x dx_i|_x \right) (v)
 \end{aligned} \tag{1-45}$$

最后, 得 $F^*(w^*)$ 的局部坐标表示

$$F^*(w^*) = \sum_{j=1}^m (w_j^* \circ F) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Big|_x dx_i|_x \right) \tag{1-46}$$

式中, $w_j^* \circ F$ 把 w_j^* 的自变量由 y 变为 x 。

1.3.4.3 对偶向量逆向映射的矩阵和向量表示

切向量映射 $v^* = F^*(w^*)$ 左端 v^* 的局部坐标表示是

$$v^* = \sum_{i=1}^n v_i^* dx_i|_x$$

注意到式(1-46), 把 $v^* = F^*(w^*)$ 两端都写成矩阵形式得

$$(v_1^* \cdots v_n^*) \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}_x = (w_1^* \circ F \cdots w_m^* \circ F) \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}_x \tag{1-47}$$

或简化为

$$(v_1^* \cdots v_n^*) = (w_1^* \circ F \cdots w_m^* \circ F) \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1-48}$$

最后得对偶向量逆向映射的矩阵和向量表示为

$$v^* = (w^* \circ F) J_F|_x \tag{1-49}$$

式中

$$J_F|_x = \frac{\partial F}{\partial x^T} \Big|_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x \tag{1-50}$$

是映射 $F: N \rightarrow M$ 在点 p 处的 Jacobi 矩阵。

第 2 章 向量场和对偶向量场

本章介绍与向量场和对偶向量场有关的基本概念,包括向量场积分曲线、向量场的流、函数的李导数、李积(李括号)、李代数、正交对偶向量场、全微分对偶向量场、对偶向量场的李导数等概念。给出了流映射的求导公式和向量场、对偶向量场的李导数计算公式。本章既是在第 1 章有关概念,特别是切向量、对偶向量概念基础上建立和给出的,同时又是第 3 章的数学基础。

2.1 向 量 场

2.1.1 向量场的定义

定义 2.1 一个集合符号。把子流形 N 上所有点的切空间的集合记为 $T(N)$,即

$$T(N) = \{T_p N : p \in N\} \quad (2-1)$$

定义 2.2 设 N 是一个 n 维光滑流形, N 上的向量场(vector field)指的是一个映射 $f: N \rightarrow T(N)$,该映射给 N 上每点 p 指定一个切向量 $f(p) \in T_p N$ 。

向量场 f 在域 $U \subset N$ 上可表示为

$$f(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \quad p \in U \subset N \quad (2-2)$$

式中, f_1, \dots, f_n 是定义在域 U 上的实值函数。

向量场在每点指定一个切向量的意义是:在每点上定义一个求导方向,同时定义一个表示切向量大小的常数,因为不同点可能有不同常数,所以对应得到一个定义在 N 上的函数。

定义 2.3 如果 f_1, \dots, f_n 都是 U 上的光滑(C^∞)函数,则称向量场 f 光滑。

2.1.2 向量场积分曲线

2.1.2.1 R^n 中的光滑曲线

定义 2.4 设 $T = (t_1, t_2)$ 是 R 上的开区间。如果映射 $\sigma: T \rightarrow N (= R^n)$ 是单射(不同点有不同的像),映射到 R^n 中的像曲线 $\sigma(t) = (\sigma_1(t) \cdots \sigma_n(t))$ 是一条曲线,并且光滑,则称像 $\sigma(t)$ 是 $N (= R^n)$ 中的一条光滑曲线(smooth curve)。

2.1.2.2 光滑曲线的切向量

作映射 $\sigma: T \rightarrow N (= R^n)$ 前,原像点 $t^0 \in T = (t_1, t_2)$ 。 T 是一维空间,其切空间的基底是 $\frac{d}{dt}$,点 t^0 的方向数为 1 的切向量是 $\frac{d}{dt} \Big|_{t^0}$ 。映射到 N 中曲线 $\sigma(t)$ 后,点 $\sigma(t^0)$ 处曲线的切向量记为 $\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t^0} \right)$ 。

映射后, 像点 $\sigma(t^0)$ 在 N 中。 N 是 n 维空间, $\sigma(t^0)$ 点切空间的基底是 $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\right)_{p=\sigma(t^0)}$ 。 $\sigma(t^0)$ 点处曲线的切向量 $\sigma_* \left(\frac{d}{dt}\right)_{t^0}$ 的方向应当是该曲线的切线方向。如果视 t 为时间, 则切线方向应取曲线的切线速度方向, 即 $\left(\frac{d\sigma_1(t)}{dt} \cdots \frac{d\sigma_n(t)}{dt}\right)_{t^0}$ 。因此, 曲线的切向量可表示为

$$\sigma_* \left(\frac{d}{dt}\right)_{t^0} = \sum_{i=1}^n \frac{d\sigma_i(t)}{dt} \Big|_{t^0} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_{\sigma(t^0)} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\right) \Big|_{\sigma(t^0)} \begin{bmatrix} \frac{d\sigma_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\sigma_n(t)}{dt} \end{bmatrix}_{t^0} \quad (2-3)$$

此式也可由式(1-41)直接得到。

2.1.2.3 向量场积分曲线定义

定义 2.5 设 N 是一个 n 维光滑子流形, f 是 N 上的向量场。上面相应于映射 $\sigma: T \rightarrow N$ 定义的光滑曲线 $\sigma(t)$, 如果满足条件: 它在任意时刻 t 的切线速度方向和大小, 等于该时刻所处 N 中一点 p 处的向量场切向量方向和大小, 则称之为向量场 f 的积分曲线。

2.1.2.4 向量场积分曲线的微分方程

按向量场积分曲线定义可建立起向量场积分曲线的微分方程。一方面, 按向量场定义, 时刻 t 向量场在 p 点的切向量是

$$f(\sigma(t)) = \sum_{i=1}^n f_i(\sigma(t)) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_{\sigma(t)} = \sum_{i=1}^n f_i \left[\begin{bmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_n(t) \end{bmatrix} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_{\sigma(t)} \quad (2-4)$$

另一方面, 由式(2-3), 积分曲线在时刻 t 的切线速度是

$$\sigma_* \left(\frac{d}{dt}\right)_t = \sum_{i=1}^n \frac{d\sigma_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_{\sigma(t)} \quad (2-5)$$

由向量场积分曲线定义, 切向量和切线速度, 即式(2-4)和式(2-5)应当相等, 消去基底后知应当满足

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = f_i(\sigma_1(t), \cdots, \sigma_n(t)) \quad i=1, \cdots, n \quad (2-6)$$

式(2-6)就是向量场积分曲线应满足的微分方程组。积分曲线就是此方程的解, 其初始条件可给出为

$$\sigma_i(t_0) = \sigma_{i0} \quad i=1, \cdots, n$$

2.1.2.5 非线性方程 $\dot{x} = f(x)$ 的解

在流形 $N = R^n$ 上满足微分方程组式(2-6)的积分曲线 $\sigma(t)$ 显然是微分方程

$$\dot{x} = f_i(x) \quad i=1, \cdots, n$$

或

$$\dot{x} = f(x) \quad (2-7)$$

的解。这是一个定义在流形 $N = R^n$ 上的非线性方程。由上面的分析结果可以看到, 第一, 非线性方程式(2-7)的右端可认为是一个向量场; 第二, 解非线性方程相当于求向量场的积分曲线。还可以看到, 线性定常系统

$$\dot{x} = Ax$$

是式(2-7)的一个特例,相应的向量场为 $f(x) = Ax$ 。

2.1.3 向量场的流

2.1.3.1 流映射的定义

非线性系统 $\dot{x} = f(x)$ 在初始条件 $x(0) = x^0$ 下的解 $x(t)$ 称向量场 $f(x)$ 的积分曲线。 $x(t)$ 与 $f(x)$, x^0 , t 有关。为清楚地表示其间的函数关系,常把积分曲线 $x(t)$ 写为 $\phi_t^f(x^0)$ 。 $\phi_t^f(x^0)$ 是积分曲线 $x(t)$ 的另一种表示方法。因积分曲线 $\phi_t^f(x^0)$ 满足系统方程,得

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t^f(x^0) = f(\phi_t^f(x^0)) \quad \phi_0^f(x^0) = x^0 \quad (2-8)$$

下面说明流的概念。如果把 $\phi_t^f(x^0)$ 中初始点 x^0 理解为出发点集,比如可以想像有一个出发截面(可能是一个超曲面),因为不同初始点会得到不同的积分曲线,所有这些积分曲线就形成了一个积分曲线束。这个曲线束可以表示为 $\phi_t^f(x)$ 。 $\phi_t^f(x)$ 是 t 和 x 的光滑函数,被称为向量场 $f(x)$ 下的流(flow)。下面是流映射的严格数学定义。

定义 2.6 设 f 是流形 N 上一光滑向量场,在向量场 f 作用下,对每点 $p \in N$,如存在一光滑映射

$$\phi^f: W \rightarrow N$$

式中, W 是定义在 $R \times N$ 上的一个子集,即

$$W = \{(t, p) \in R \times N : t \in I_p\}$$

和 I_p 是 R 上含原点的一个开区间,则 ϕ^f 被称为向量场 f 下的一个流映射(flow map)。

注意:这里的 I_p 是 $T = (t_1, t_2)$ 的更一般的表示。

2.1.3.2 流映射的性质

定理 2.1 上面定义的流映射有如下性质。

$$\text{性质 1} \quad \phi^f(0, p) = \phi_0^f(p) = p \quad (2-9)$$

性质 2 流线 $\phi^f(t, p) = \phi_t^f(p)$ 是在向量场 f 下,在 $t=0$ 时刻由 p 出发的一条积分曲线。

性质 3 流线的唯一性。设 $\sigma_p: I_p \rightarrow N$ 是向量场 f 下满足 $\sigma_p(0) = p$ 的一条流线(积分曲线)。如果 $\mu: (t_1, t_2) \rightarrow N$ 是向量场 f 下满足 $\mu(0) = p$ 的另一条流线(积分曲线),则限于 (t_1, t_2) 的 σ_p 必与 μ 重合。

性质 4 在流有定义的条件下,

$$\phi_t^f \circ \phi_s^f(p) = \phi_{t+s}^f(p) \quad (2-10)$$

性质 5 只要 $\phi_t^f(p)$ 有定义,就存在 p 的一个开邻域 U , U 经映射 $\phi_t^f: U \rightarrow N$,得到的像 $\phi_t^f(q)$ 与 U 是一个微分同胚(因此, ϕ_t^f 的逆映射 $(\phi_t^f)^{-1}$ 存在且光滑),并且

$$(\phi_t^f)^{-1} = \phi_{-t}^f \quad (2-11)$$

例如

$$(\phi_t^f)^{-1}(\hat{q}) = q$$

式中, $\hat{q}q = \phi_t^f(q)$ 。

性质 5 是流的一个重要性质,说明不同时刻的流截面间互为局部微分同胚。对任何给定点 x^0 邻域形成的流断面 x ,都有一个(适当小的) t 使映射

$$\phi_t^f: x \rightarrow \phi_t^f(x)$$

在该 x^0 邻域的所有 x 上有定义,而且是一个局部微分同胚映射。

在初始条件 $\sigma_p(0) = p$ 给定的情况下, 积分曲线随之确定。它是流线中的一条。性质 3 说明积分曲线 $\sigma_p(t)$ 是唯一的。

2.1.3.3 流映射的几个求导公式

本小节给出的几个公式都与流映射有关, 将在后面第 3 章证明 Frobenius 定理时使用。下面的公式 4 用到了李积, 公式 5 用到了分布、对合等后面要讲到的内容, 因为与流映射有关, 为查找方便, 也集中放在这里。建议读者阅读时可先跳过本小节, 待阅读完第 3 章后回过头来再阅读本小节。在以下公式中, θ 用来表示一个指定向量场, 并用符号 $(\phi_t^\theta)_*$ 和 $(\phi_{-t}^\theta)_*$ 分别表示映射 ϕ_t^θ 和 ϕ_{-t}^θ 的 Jacobi 阵, 即

$$(\phi_t^\theta)_* = \frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^\top}, \quad (\phi_{-t}^\theta)_* = \frac{\partial \phi_{-t}^\theta}{\partial \hat{x}^\top}$$

另外, 用 \hat{x} 表示 x 的像, 即 $\hat{x} = \phi_t^\theta(x)$ 。

公式 1 设 $\phi_t^\theta(x^0)$ 是向量场 θ 下的积分曲线, 则

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t^\theta(x) = \theta(\phi_t^\theta(x)) \quad (2-12)$$

证明 见式(2-8)。

$$\text{公式 2} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} = - \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x^\top} \quad (2-13a)$$

或写为

$$\frac{d}{dt} (\phi_{-t}^\theta)_* = - (\phi_{-t}^\theta)_* \frac{\partial \theta}{\partial x^\top} \quad (2-13b)$$

式中, $(\phi_t^\theta)_*$ 是映射 ϕ_t^θ 的 Jacobi 阵; $(\phi_{-t}^\theta)_*$ 是映射 ϕ_{-t}^θ 的 Jacobi 阵。

证明 由式(2-10)知, 相串的映射 $\phi_{-t}^\theta \phi_t^\theta = \phi_0^\theta$, 并且映射 ϕ_t^θ 的 Jacobi 阵 $(\phi_t^\theta)_*$ 和 ϕ_{-t}^θ 的 Jacobi 阵 $(\phi_{-t}^\theta)_*$ 有恒等式关系

$$(\phi_t^\theta)_* (\phi_{-t}^\theta)_* = \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top} = \frac{\partial x}{\partial (\phi_t^\theta(x))^\top} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top} = I$$

两端对 t 求导得

$$0 = \frac{d}{dt} [(\phi_t^\theta)_* (\phi_{-t}^\theta)_*] = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \right) \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top} + \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top}$$

因为 $\phi_t^\theta(x)$ 对 x 和 t 光滑, 右端第二项中后因子求导次序可互换, 互换后把公式 1 代入, 得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top} = \frac{\partial}{\partial x^\top} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^\top} (\theta \circ \phi_t^\theta(x)) = \frac{\partial (\theta \circ \phi_t^\theta(x))}{\partial (\phi_t^\theta(x))^\top} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top} = \frac{\partial \theta}{\partial x^\top} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top}$$

把此结果代回前式得

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \right) \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top} + \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{\partial \theta}{\partial x^\top} \frac{\partial \phi_t^\theta(x)}{\partial x^\top}$$

因为一般 $\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^\top} \neq 0$, 于是得到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} = - \frac{\partial \phi_{-t}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{\partial \theta}{\partial x^\top}$$

公式得证。

$$\text{公式 3} \quad \frac{d}{dt} (f_i \circ \phi_t^\theta(x)) = \frac{\partial f_i}{\partial x^\top} \theta \circ \phi_t^\theta(x) \quad (2-14)$$

式中, f_i 表示 d 维分布的第 i 个向量场。

证明 注意到把公式中 1 代入得

$$\frac{d}{dt}(f_i \circ \phi_i^\theta(x)) = \frac{\partial(f_i \circ \phi_i^\theta(x))}{\partial(\phi_i^\theta(x))^\top} \frac{\partial \phi_i^\theta(x)}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial x^\top} \theta \circ \phi_i^\theta(x)$$

证毕

$$\text{公式 4} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_i \circ \phi_i^\theta(x) \right) = \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} [\theta, f_i] \circ \phi_i^\theta(x) \quad (2-15a)$$

$$\text{或令} \quad V_i(t) = \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_i \circ \phi_i^\theta(x) = (\phi_{-i}^\theta) * f_i \circ \phi_i^\theta(x)$$

$$\text{写为} \quad \frac{dV_i}{dt} = (\phi_{-i}^\theta) * [\theta, f_i] \circ \phi_i^\theta(x) \quad (2-15b)$$

式中, $[\theta, f_i]$ 表示李积, 其意义请读者参见本章后面的定义 2.11。

证明 注意利用上面公式 2 和公式 3 的结果, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_i \circ \phi_i^\theta(x) \right) &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \right) f_i \circ \phi_i^\theta(x) + \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{d}{dt} (f_i \circ \phi_i^\theta(x)) \\ &= - \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{\partial \theta}{\partial x^\top} f_i \circ \phi_i^\theta(x) + \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \frac{\partial f_i}{\partial x^\top} \theta \circ \phi_i^\theta(x) \\ &= \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^\top} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x^\top} f_i \right) \circ \phi_i^\theta(x) \\ &= \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} [\theta, f_i] \circ \phi_i^\theta(x) \end{aligned}$$

公式 5 如果 $\Delta = \text{span}\{f_i(x) : i = 1, \dots, d\}$, Δ 对合, $\theta \in \Delta$, 则因 $[\theta, f_i]$ 可表示为

$$[\theta, f_i] = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij} f_j$$

公式 4 可进一步写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_i \circ \phi_i^\theta(x) \right) = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij} (\phi_i^\theta(x)) \left(\frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_j \circ \phi_i^\theta(x) \right) \quad (2-16a)$$

$$\text{或写为} \quad \frac{dV_i}{dt} = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij} (\phi_i^\theta(x)) V_j \quad (2-16b)$$

式中, λ_{ij} 是局部定义在 x^0 邻域的函数。

证明 由假设, $\theta \in \Delta$, Δ 对合, 因此 $[\theta, f_i]$ 在 x^0 邻域可表示为

$$[\theta, f_i] = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij} f_j \quad (2-17)$$

代入公式 4 右端, 注意: $\lambda_{ij} \circ \phi_i^\theta(x)$ 构成了一个复合函数, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_i \circ \phi_i^\theta(x) \right) &= \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} [\theta, f_i] \circ \phi_i^\theta(x) \\ &= \frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} \left(\sum_{j=1}^d \lambda_{ij} f_j \right) \circ \phi_i^\theta(x) = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij} (\phi_i^\theta(x)) \left(\frac{\partial \phi_{-i}^\theta(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\top} f_j \circ \phi_i^\theta(x) \right) \end{aligned} \quad (2-18)$$

2.2 向量场的李代数结构

2.2.1 函数的李导数

研究向量场必须要借助于有效的数学工具,这个数学工具就是李代数。在定义李代数之前,先讨论函数的李导数。

定义 2.7 设 λ 是定义在流形 N 上的一个光滑实值函数,即 $\lambda \in C^\infty(N)$, f 是 N 上一光滑向量场。函数 λ 沿向量场 f 方向的李导数(Lie derivative)是映射

$$\begin{aligned} L_f: C^\infty(N) &\rightarrow C^\infty(N) \\ L_f\lambda(p) &= (f(p))(\lambda) \quad p \in U \subset N \end{aligned} \quad (2-19)$$

的结果。如果是流形 $N = R^n$ 的情况,则函数 λ 沿某向量场 f 方向的李导数可具体表示为

$$L_f\lambda(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} (\lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f = \langle d\lambda, f \rangle \quad (2-20)$$

由定义可知,李导数映射 L_f 是一个泛函(算子)。就某点 x_0 来说, L_f 是一个切向量, $L_f\lambda(x_0)$ 等于函数 λ 在点 x_0 沿 f 方向的方向导数;就整个邻域 $U \subset N$ 来说, L_f 是一个向量场, $L_f\lambda(x)$ 是一个 C^∞ 函数。

必须强调的是,函数的李导数有如下的重要性质:函数 λ 原来是一个光滑函数,对它求李导数之后,所得结果仍然是一个光滑函数。这一性质保证了可以重复地进行求函数李导数的运算,是定义高阶李导数的基础。

定义 2.8 函数的高阶李导数用以下递推形式的公式来定义。

k 阶李导数为

$$\begin{aligned} L_f^k \lambda &= L_f(L_f^{k-1} \lambda) \\ L_g L_f^{k-1} \lambda &= L_g(L_f^{k-1} \lambda) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-21)$$

同时约定:零阶李导数为

$$L_f^0 \lambda = \lambda$$

2.2.2 向量场上的李代数

定义 2.9 一流形 N 上所有光滑向量场的集合记为 $V(N)$,即

$$V(N) = \{f(p): f(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))^T, f_i(p) \in C^\infty(p), i=1, \dots, p \in U \subset N\}$$

定义 2.10 在光滑向量场集合 $V(N)$ 上定义“加”和“数乘”运算

$$\begin{aligned} (f(p) + g(p))(\lambda) &= (f(p))(\lambda) + (g(p))(\lambda) \quad \forall f, g \in V(N) \\ (af(p))(\lambda) &= a(f(p))(\lambda) \quad \forall a \in R, \forall f \in V(N) \end{aligned}$$

定义二运算之后, $V(N)$ 构成了 R 域上的线性空间(向量空间),称它为光滑向量场空间。

因为没有乘法仍不足以构成李代数,下面着手定义李积。

定义 2.11 李积(Lie product)或称李括号(Lie brackets)是一个映射

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$$

$$([f, g](p))(\lambda) = (L_f L_g \lambda)(p) - (L_g L_f \lambda)(p) \quad \forall f, g \in V(N) \quad p \in U \subset N$$

或简写为

$$\begin{aligned} [f, g]\lambda &= L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda \\ [f, g] &= L_f L_g - L_g L_f \end{aligned} \quad (2-22)$$

由定义可知,李积(李括号) $[\cdot, \cdot]$ 是一个泛函(算子)。李积相当于求向量场 g 沿向量场 f 方向的导数。必须强调的是,二光滑向量场 f, g 求李积 $[f, g]$ 后仍是一光滑向量场。这一性质是可以重复地进行求李积运算的保证,是定义高阶李积(李括号)的基础。

定义 2.12 线性空间 $V(N)$ 上定义了乘法运算——李积之后, $V(N)$ 成为一个代数,称李代数(Lie algebra)。

2.2.3 李积的性质

定义李代数的李积必须具有以下三个基本性质。

1. 双线性

$$[af_1 + bf_2, g] = a[f_1, g] + b[f_2, g] \quad \forall a, b \in R, \forall f_1, f_2, g \in V(N)$$

$$[f, ag_1 + bg_2] = a[f, g_1] + b[f, g_2] \quad \forall a, b \in R, \forall f, g_1, g_2 \in V(N)$$

2. 反对称性

$$[f, g] = -[g, f]$$

3. Jacobi 恒等式

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$$

由以上基本性质可以推导出下面两个从属性质。

4. $[f, f] = 0$, 否则与性质 2 相违背。

5. 一般地 $[[f, g], h] \neq [f, [g, h]]$, 即乘法结合律不成立, 否则性质 3 将导出 $[[h, f], g] = 0$ 的不合理结论。

2.2.4 李积(李括号)的计算公式

设流形 $N = R^n$, 其切空间基底为

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T \quad \frac{\partial}{\partial x^T} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

设 λ 是定义在 $N = R^n$ 上的光滑函数, f, g 是定义在切空间中的两个光滑向量场

$$f = (f_1 \cdots f_n)^T \quad g = (g_1 \cdots g_n)^T$$

则可推导出

$$L_g \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} g$$

$$L_f L_g \lambda(x) = \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} g \right) f = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial x^T} + g^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x^T} \right) f$$

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f$$

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f \right) g = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} + f^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x^T} \right) g$$

按李积(李括号)定义得

$$[f, g](\lambda) = L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda) \quad (2-23)$$

式(2-23)直接地表明了,李积的结果是一个新的向量场,新向量场的方向是两个向量场 $\frac{\partial g}{\partial x^T} f$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x^T} g$ 之差所决定的方向。

李积(李括号)也可以写成函数的李导数的形式。按函数的李导数的定义

$$L_f \lambda(p) = (f(p))(\lambda)$$

在此式中,以向量场 $[f, g]$ 代替向量场 f 就得到公式

$$L_{[f, g]} \lambda = [f, g] \lambda \quad (2-24)$$

2.2.5 高阶李积(李括号)

在高阶情况下,以括号 $[]$ 形式表示的李积(李括号),因为括号嵌套的层数很多,用起来很不方便,所以又提出了另一种李积表示方法。新方法用代号 ad 取代括号 $[]$ 。比如,对一阶李积,等价的表示形式是

$$[f, g](\lambda) = \text{ad}_f g(\lambda) \quad (2-25)$$

下面让我们定义高阶李积。定义时同时给出了两种表示形式。

定义 2.13 高阶李积用以下递推形式的公式来定义。

二阶李积

$$\begin{aligned} [f, [f, g]] &= \text{ad}_f^2 g = [f, \text{ad}_f g] \\ [g, [f, g]] &= \text{ad}_g \text{ad}_f g = [g, \text{ad}_f g] \end{aligned}$$

三阶李积

$$\begin{aligned} [f, [f, [f, g]]] &= \text{ad}_f^3 g = [f, \text{ad}_f^2 g] \\ [g, [f, [f, g]]] &= \text{ad}_g \text{ad}_f^2 g = [g, \text{ad}_f^2 g] \\ [f, [g, [f, g]]] &= \text{ad}_f \text{ad}_g \text{ad}_f g = [f, [g, \text{ad}_f g]] \\ &\dots \end{aligned}$$

同时约定,零阶李积为

$$\text{ad}_f^0 g = g$$

2.3 对偶向量场

2.3.1 对偶向量场的定义

定义 2.14 流形 N 上所有点对偶空间的集合记为 $T^*(N)$, 即

$$T^*(N) = \{T_p^* N : p \in N\}$$

定义 2.15 设 N 是一个 n 维光滑流形, N 上的对偶向量场(covector field)指的是一个映射 $\omega: N \rightarrow T^*(N)$, 该映射给 N 上每点 p 指定一个对偶向量 $\omega(p) \in T_p^* N$ 。

对偶向量场 ω 在 p 点邻域 U 上可表示为

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p) d\varphi_i|_p = (\omega_1(p) \cdots \omega_n(p)) \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{bmatrix}_p \quad p \in U \subset N \quad (2-26)$$

式中, $\omega_1, \dots, \omega_n$ 是定义在 p 点邻域 U 上的实值函数。

因为式(1-12)的关系 $v^*(v) = \langle v^*, v \rangle$ 对流形 N 中 v, v^* 有定义的每一点都成立, 所以对应地有对偶向量场对向量场运算的公式

$$\omega(f)(p) = \langle \omega, f \rangle(p) = \langle \omega(p), f(p) \rangle \quad p \in U \subset N \quad (2-27)$$

定义 2.16 如果上面定义中 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 是 U 上的光滑函数, 则称对偶向量场 ω 光滑。

2.3.2 正交对偶向量场和全微分对偶向量场的定义

定义 2.17 在流形 N 中每点 $p \in U \subset N$ 都满足

$$\langle \omega, f \rangle(p) = \omega_1 f_1 + \cdots + \omega_n f_n = 0 \quad p \in U \subset N \quad (2-28)$$

的对偶向量场称为正交对偶向量场(orthogonal covector field)。

定义 2.18 对任一光滑函数 $\lambda: N \rightarrow R$, 通过在每点 $p \in U \subset N$ 取全微分对偶向量 $d\lambda|_p$, 可得到一对偶向量场, 称之为全微分对偶向量场(exact covector field), 记为 $d\lambda$ 。

当 $x \in N = R^n$ 时, 全微分对偶向量场的公式为

$$d\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x}^T dx \quad (2-29)$$

2.3.3 对偶向量场的李导数

定义 2.19 在流形 N 上所有光滑对偶向量场的集合记为 $V^*(N)$, 即

$$V^*(N) = \{ \omega(p) : \omega(p) = (\omega_1(p), \dots, \omega_n(p)), \omega_i(p) \in C^\infty(p), \\ i = 1, \dots, n, p \in U \subset N \}$$

定义 2.20 设 f 和 ω 分别为流形 N 上的光滑向量场和光滑对偶向量场。对偶向量场 ω 在向量场 f 方向上的李导数定义为一个映射

$$L_f: V^*(N) \rightarrow V^*(N) \\ L_f \omega(p) = (\langle d\omega^T, f \rangle)^T + \langle \omega, df \rangle \quad (2-30)$$

式中

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad df = \begin{bmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{bmatrix} \quad \omega^T = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad d\omega^T = \begin{bmatrix} d\omega_1 \\ \vdots \\ d\omega_n \end{bmatrix} = ((d\omega_1)^T, \dots, (d\omega_n)^T)^T$$

$d\omega_i, df_i$ 分别为相应于函数 ω_i 和 f_i 的全微分对偶向量。

在上述定义中, 求李导数前, $\omega \in V^*(N)$ 是一光滑对偶向量场, 求李导数之后, $L_f \omega \in V^*(N)$, 仍然是一光滑对偶向量场, 属于同一空间。这是对偶向量场李导数的一个重要性质。这一性质保证了可以重复地进行求对偶向量场李导数的运算, 是定义对偶向量场高阶李导数的基础。

在定义式(2-30)中, ω 表示对偶向量场的方向向量, $L_f \omega$ 也表示对偶向量场的方向向

量,都未给出基底部分(基底是 $d\varphi$)。同样, df_i 和 $d\omega_i$ 也只表示方向向量(行向量)。

2.3.4 对偶向量场李导数的计算公式

设流形 $N = R^n$, 因为

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x^T} \quad d\omega_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^T} \quad df = \begin{bmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x^T} \quad d\omega^T = \begin{bmatrix} d\omega_1 \\ \vdots \\ d\omega_n \end{bmatrix} = \frac{\partial \omega^T}{\partial x^T}$$

代入定义式(2-30)得

$$L_f \omega = (\langle d\omega^T, f \rangle)^T + \langle \omega, df \rangle = f^T \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial f}{\partial x^T} \quad (2-31)$$

2.3.5 对偶向量场高阶李导数

定义 2.21 对偶向量场的高阶李导数同样用递推形式的公式来定义。

对偶向量场的二阶李导数为

$$\begin{aligned} L_f^2 \omega &= L_f(L_f \omega) \\ L_g L_f \omega &= L_g(L_f \omega) \end{aligned}$$

对偶向量场的三阶李导数为

$$\begin{aligned} L_f^3 \omega &= L_f(L_f^2 \omega) \\ L_g L_f^2 \omega &= L_g(L_f^2 \omega) \\ L_f L_g L_f \omega &= L_f(L_g L_f \omega) \\ &\dots \end{aligned}$$

同时约定,零阶李导数为

$$L_f^0 \omega = \omega$$

2.4 与向量场和对偶向量场有关的计算公式

2.4.1 函数沿向量场的李导数的计算公式

在本节下面各公式中,统一用 f, g 表示向量场, ω 表示对偶向量场, λ, α, β 表示实值函数,不再一一说明。

$$\text{公式 6} \quad L_f \lambda(x) = (f(x))\lambda(x) \quad (2-32)$$

证明 由函数李导数的定义式(2-19)可得。与式(2-20)对比可知,式(2-32)右端省略了基底部分。

$$\text{公式 7} \quad L_{af} \lambda(x) = (L_f \lambda(x))\alpha(x) \quad (2-33)$$

证明 按李导数定义

$$L_{af} \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T}(\alpha(x)f(x)) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f(x) \right) \alpha(x) = (L_f \lambda(x))\alpha(x)$$

$$\text{公式 8} \quad L_{[f,g]} \lambda(x) = [f, g](x) \quad (2-34)$$

证明 见式(2-24)。

$$\text{公式 9} \quad L_{[f,g]}\lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x) \quad (2-35)$$

证明 由公式 8 及 $[f, g]$ 定义可得。或由式(2-20)得

$$\begin{aligned} L_{[f,g]}\lambda(x) &= \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} [f, g] = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \left[\frac{\partial g}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right] = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial x^T} f - \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} g \\ &= g^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x^T} f + \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial x^T} f - f^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x^T} g - \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} g \\ &= \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} g \right) f - \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f \right) g = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x) \end{aligned}$$

2.4.2 李积(李括号)的计算公式

$$\begin{aligned} \text{公式 10} \quad [\alpha f, \beta g](x) &= \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) \\ &\quad + (L_f \beta(x)) \alpha(x) g(x) - (L_g \alpha(x)) \beta(x) f(x) \end{aligned} \quad (2-36)$$

证明

$$\begin{aligned} [\alpha f, \beta g](x) &= \frac{\partial(\beta g)}{\partial x^T} \alpha f - \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x^T} \beta g \\ &= g \frac{\partial \beta}{\partial x^T} \alpha f + \beta \frac{\partial g}{\partial x^T} \alpha f - f \frac{\partial \alpha}{\partial x^T} \beta g - \alpha \frac{\partial f}{\partial x^T} \beta g \\ &= \alpha \beta [f, g] + g \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^T} f - f \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x^T} g \\ &= \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) g(x) - (L_g \alpha(x)) \beta(x) f(x) \end{aligned}$$

2.4.3 与对偶向量场有关的计算公式

$$\begin{aligned} \text{公式 11} \quad L_{\alpha f} \beta \omega(x) &= \alpha(x) \beta(x) L_f \omega(x) + \beta(x) \langle \omega(x), f(x) \rangle d\alpha(x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) \omega(x) \\ &\quad (2-37) \end{aligned}$$

证明 首先用向量形式推导。

$$\begin{aligned} L_{\alpha f} \beta \omega(x) &= \alpha f^T \frac{\partial \beta \omega}{\partial x} + \beta \omega \frac{\partial \alpha f}{\partial x^T} \\ &= \alpha f^T \left(\beta \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \omega \right) + \beta \omega \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x^T} + f \frac{\partial \alpha}{\partial x^T} \right) \\ &= \alpha \beta f^T \frac{\partial \omega}{\partial x} + \alpha f^T \frac{\partial \beta}{\partial x} \omega + \alpha \beta \omega \frac{\partial f}{\partial x^T} + \beta \omega f \frac{\partial \alpha}{\partial x^T} \\ &= \alpha \beta \left(f^T \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial f}{\partial x^T} \right) + \beta \langle \omega, f \rangle \frac{\partial \alpha}{\partial x^T} + \frac{\partial \beta}{\partial x^T} f \alpha \omega \\ &= \alpha \beta L_f \omega + \beta \langle \omega, f \rangle d\alpha + (L_f \beta) \alpha \omega \end{aligned}$$

其次,用展开形式推导

$$\begin{aligned} [L_{\alpha f} \beta \omega]_i &= \sum_{j=1}^n \alpha f_j \frac{\partial \beta \omega_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \beta \omega_j \frac{\partial \alpha f_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha f_j \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \alpha f_j \omega_i \frac{\partial \beta}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \beta \omega_j \alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \beta \omega_j f_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \\ &= [\alpha \beta (L_f \omega)]_i + [\alpha (L_f \beta) \omega]_i + [\beta \langle \omega, f \rangle d\alpha]_i \end{aligned}$$

$$\text{公式 12} \quad L_f \langle \omega, g \rangle(x) = \langle L_f \omega(x), g \rangle + \langle \omega(x), [f, g](x) \rangle \quad (2-38)$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad L_f \langle \omega, g \rangle &= \frac{\partial \langle \omega, g \rangle}{\partial x^T} f = \left\langle \frac{\partial(\omega g)}{\partial x^T}, f \right\rangle = \left\langle g^T \frac{\partial \omega^T}{\partial x^T} + \omega \frac{\partial g^T}{\partial x^T}, f \right\rangle \\ &= \left\langle f^T, \frac{\partial \omega}{\partial x} g \right\rangle + \left\langle \omega, \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right\rangle + \left\langle \omega \frac{\partial g^T}{\partial x^T}, f \right\rangle - \left\langle \omega, \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right\rangle \\ &= \left\langle f^T \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial f}{\partial x^T}, g \right\rangle + \left\langle \omega, \frac{\partial g^T}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g \right\rangle \\ &= \langle L_f \omega, g \rangle + \langle \omega, [f, g] \rangle \end{aligned}$$

$$\text{公式 13} \quad L_f d\lambda(x) = dL_f \lambda(x) \quad (2-39)$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad L_f d\lambda(x) &= L_f \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} = f^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} \\ &= f^T \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} = \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f \right) \\ &= d \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f \right) = dL_f \lambda(x) \end{aligned}$$

$$\text{公式 14} \quad \langle dL_f \lambda(x), g(x) \rangle = L_g L_f \lambda(x) \quad (2-40)$$

证明 由式(2-20), 知 $L_g \lambda(x) = \langle d\lambda, g \rangle$, 把 $L_f \lambda(x)$ 视为 λ , 代入后即得证。

$$\text{公式 15} \quad \langle dL_f \lambda(x), \text{ad}_f^k g(x) \rangle = L_{\text{ad}_f^k g} L_f \lambda(x) \quad (2-41)$$

证明 把 $\text{ad}_f^k g(x)$ 视为 g , 代入公式 14 即得证。

第3章 分布和对偶分布

本章介绍与分布和对偶分布有关的基本概念,包括分布的非奇异性、光滑性、对合性、 $\text{smt}(\Delta)$ 、 $\text{inv}(\Delta)$ (对合闭包)和对偶分布的非奇异性、光滑性等概念,以及正交对偶分布、正交分布、零化子等概念。本章内容是在第2章有关概念,特别是向量场、对偶向量场概念基础上建立和给出的,同时又为下一章研究不变分布和不变对偶分布提供数学基础。

3.1 分布

3.1.1 分布的定义

式(2-7)所定义的非线性系统的右方只有一个向量场,对于更一般的非线性系统来说,其右方可能出现多个向量场。为应对这种情况,必须引入分布概念。在定义分布之前,请注意定义2.1所定义的符号 $T(N)$ 。 $T(N)$ 表示子流形 N 上所有点的切空间的集合。

定义 3.1 定义在流形 N 上的一个分布(distribution) Δ 指的是一个映射 $\Delta: N \rightarrow T(N)$,它给每点 $p \in N$ 指定一个 $\Delta_p \in T_p(N)$, Δ_p 是 p 点切空间 $T_p(N)$ 的一个子空间。

分布 Δ 可表示为

$$\Delta(p) = \text{span}\{f_1(p), \dots, f_d(p)\} \quad p \in U \subset N$$

或

$$\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_d\}$$

式中, f_1, \dots, f_d 是定义在 N 上的 d 个向量场。如果 f_1, \dots, f_d 都是独立向量场,则 $d \leq n$ 。注意:符号 span 的含义是“通过向量场的线性组合来张成”,组合的结果因所采用的系数不同而有多种可能,系数的连续变化将形成一定的散布,分布即由此得名。即使分布只由一个向量场张成,也并不等同于该向量场本身,其系数的改变将形成一组一维向量场。

例 3.1 (由三个向量场构成右端分布的系统)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1+x_3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ (1+x_3)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

右端三向量中的每一个可视为一向量场,三向量场共同张成一分布

$$\Delta(x) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 1+x_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ (1+x_3)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

定义 3.2 集合运算

分布的并(union): $(\Delta_1 \cup \Delta_2)(p) = \Delta_1(p) \cup \Delta_2(p) \quad p \in U;$

分布的交(intersection): $(\Delta_1 \cap \Delta_2)(p) = \Delta_1(p) \cap \Delta_2(p) \quad p \in U;$

向量场 $f \in \Delta$: 指对所有点 $p \in U$ 有 $f(p) \in \Delta(p)$;

分布 $\Delta_1 \subset \Delta_2$: 指对所有点 $p \in U$ 有 $\Delta_1(p) \subset \Delta_2(p)$ 。

例 3.2 (分布的并和交) 设

$$\Delta_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \Delta_2(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{则 } (\Delta_1 \cup \Delta_2)(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}$$

3.1.2 分布的奇异性和正则性

定义 3.3 p 点子空间 $\Delta(p)$ 的维数称为分布 Δ 在 p 点的维数 (dimension), 记为 $\dim(\Delta(p))$ 。

定义 3.4 如果对开集 U 上任意点 $p \in U$ 来说, 都有 $\dim(\Delta(p)) = d = \text{确定整数}$, 则称定义在 U 上的分布 Δ 是非奇异的 (nonsingular), 反之称为奇异的 (singular)。

非奇异分布改称不变维分布将更易理解, 相应地, 以下定义中的正则点可改称为不变维点, 奇异点可改称为变维点。

定义 3.5 如果 U 上的 p 点存在邻域 U_0 , 在 U_0 上 Δ 非奇异, 则称 p 为分布 Δ 的正则点 (regular point), 否则称之为奇异点 (point of singularity)。

例 3.3 (分布的正则点和奇异点) 在 R^2 上定义二分布

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1+x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

可求得二分布之交为

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \begin{cases} 0 & x_1 \neq 0 \\ \Delta_1(x) & x_1 = 0 \end{cases}$$

按定义, $x_1 = 0$ (即 x_2 轴) 上各点分别是 Δ_1, Δ_2 的正则点, 但它们都不是 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 的正则点, 而是奇异点, 因为这些点都找不到邻域 U , 使其上各点维数相等。

性质 1 定义在 U 上的分布 Δ 的全部正则点的集合 (各正则点不一定同维) 是 U 上的开集和稠子集。

事实上, 开集是显然的, 否则边界上的点找不到全部为正则点的邻域, 不可能是正则点。稠子集的结果可用反证法得到。如果不是稠子集, 则必存在区域 $V \subset U$, 在 V 上任何点都找不到随便是多么小的同维邻域, 对于无限可分割的连续域来说, 这是不成立的。

3.1.3 分布的光滑性

3.1.3.1 分布光滑性定义及其性质

定义 3.6 如果分布 Δ 是由一些 C^∞ 向量场, 以 C^∞ 函数为系数张成, 则称 Δ 为光滑分布 (smooth distribution), 或称 C^∞ 分布 (C^∞ distribution)。

按定义, 光滑分布的每个分量, 作为一个函数, 都是光滑的。此外, 光滑分布具有下列性质。

性质 1 两光滑分布的并仍是光滑分布。

事实上, 如果 Δ_1 由光滑向量场 f_1, \dots, f_k 张成, Δ_2 由光滑向量场 g_1, \dots, g_l 张成, 则 $\Delta_1 + \Delta_2$ 就由光滑向量场 $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$ 张成, 按定义, $\Delta_1 + \Delta_2$ 光滑。

例 3.4 (光滑分布的并) 在 R^2 上定义的二分布 Δ_1, Δ_2 同例 3.3, 可求得其并为

$$(\Delta_1 \cup \Delta_2)(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

并后的分布是光滑的。顺便指出, 这里得到的 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 同时也是光滑但奇异的例子。作为非奇异但不光滑的例子, 比如

$$\Delta = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -|x_1| \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

性质 2 两光滑分布的交不一定是光滑分布。

此性质有下例为证。

例 3.5 (光滑分布的交) 在 R^2 上定义的二分布 Δ_1, Δ_2 同例 3.3, 其交已在例 3.3 中求得。

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \begin{cases} 0 & x_1 \neq 0 \\ \Delta_1(x) & x_1 = 0 \end{cases}$$

除 x_2 轴之外, 分布的交均取零值, 在 x_2 轴上的点不光滑。顺便指出, 这里的 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 同时也是不光滑且奇异的例。

以下二性质是与分布相互包含有关的性质, 因为与非奇异性和光滑性有关, 所以列在这里。

性质 3 设 Δ_1, Δ_2 是定义在 U 上的二光滑分布, Δ_2 非奇异, 同时在 U 的一个稠子集的每点 x 上满足 $\Delta_1(x) \subset \Delta_2(x)$, 则在 U 的每点 x 上, 有 $\Delta_1(x) \subset \Delta_2(x)$, 即 $\Delta_1 \subset \Delta_2$ 。

按分布非奇异性的性质 1, 定义在 U 上的分布 Δ_1, Δ_2 各自的全部正则点的集合是 U 上的开集和稠子集。本性质所提到的稠子集指的是分布 Δ_1 全部正则点的集合在 U 上所形成的稠子集。注意, 性质 3 成立的前提是 Δ_2 非奇异, 无此约束, 此结论不一定成立。

性质 4 设 Δ_1, Δ_2 是定义在 U 上的二光滑分布, Δ_1 非奇异, $\Delta_1 \subset \Delta_2$, 同时在 U 的一个稠子集的每点 x 上都满足 $\Delta_1(x) = \Delta_2(x)$, 则在 U 上有 $\Delta_1 = \Delta_2$ 。

性质 4 成立意味着两分布完全重合。本性质所提到的稠子集指的是分布 Δ_2 全部正则点的集合在 U 上所形成的稠子集。注意, 性质 4 成立的前提是 Δ_2 非奇异, 无此约束, 此结论不一定成立。

3.1.3.2 关于 $\text{smt}(\Delta)$

如果分布 Δ 不光滑, 在必要时往往用比 Δ 所含向量场略少的 $\text{smt}(\Delta)$ 来近似代替 Δ , 以便引用一些要求分布光滑的定理。下面给出其定义。

定义 3.7 不光滑分布 Δ 中所有光滑向量场之并是一分布, 记为 $\text{smt}(\Delta)$ 。

从定义出发,易证明 $\text{smt}(\Delta)$ 有以下性质。

性质 1 $\text{smt}(\Delta)$ 是 Δ 中最大光滑分布。

性质 2 $\text{smt}(\Delta)$ 是唯一的。

3.1.3.3 光滑分布正则点的邻域的基底向量场

下面的定理说明,光滑分布正则点的邻域必能找到基底向量场。

定理 3.1 设 Δ 是一光滑分布, x_0 是 Δ 的正则点, $\dim(\Delta(x_0)) = d$, 则 x_0 必有开邻域 U_0 , 在其上可找到光滑向量场集合 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 构成基底, 使属于 Δ 的 U_0 上的任一光滑向量场 τ 可表示为

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x) \quad (3-1)$$

式中, $c_1(x), \dots, c_d(x)$ 是在 U_0 上有定义的 x 的光滑函数。

证明 前面的结果是自然的, 只需证明式(3-1)。如果 τ 是 Δ 中向量场, 则对 x_0 邻域各点 x , 下面的 $n \times (d+1)$ 矩阵

$$[f_1(x) \quad f_2(x) \quad \cdots \quad f_d(x) \quad \tau(x)]$$

有秩 d 。据此可推得 $\tau(x)$ 的表达式。此矩阵各元素的光滑性说明 $c_i(x)$ 是光滑的。

3.1.3.4 光滑分布的交仍光滑的条件

下面的定理说明,光滑分布的交也光滑的条件是交在该点正则。

定理 3.2 设 Δ_1, Δ_2 光滑, 如果 x_0 是分布 Δ_1, Δ_2 和 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 的正则点, 则存在 x_0 的邻域 U_0 , 在其上 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 光滑。

证明 设 Δ_1, Δ_2 的维数分别为 d_1, d_2 , 按定理 3.1 的式(3-1), 在 x_0 附近 Δ_1, Δ_2 可表示为

$$\Delta_1 = \text{span}\{f_i : 1 \leq i \leq d_1\} \quad \Delta_2 = \text{span}\{g_i : 1 \leq i \leq d_2\}$$

或进一步表示为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{d_1} a_i(x) f_i(x) \quad \Delta_2 = \sum_{i=1}^{d_2} b_i(x) g_i(x)$$

式中, $a_i(x), b_i(x)$ 是可自由选择的光滑函数。求交 $\Delta_1(x) \cap \Delta_2(x)$ 的方法是找 Δ_1 和 Δ_2 的共同部分, 即解齐次方程

$$\sum_{i=1}^{d_1} a_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{d_2} b_i g_i(x) = 0$$

改写此式为代数方程组 $Ax=0$ 的形式, 其中矩阵 $A = [f_1 \quad \cdots \quad f_{d_1} \quad g_1 \quad \cdots \quad g_{d_2}]$, A 为 $n \times (d_1 + d_2)$ 维, 待求向量 $x = [a_1(x) \cdots a_{d_1}(x) b_1(x) \cdots b_{d_2}(x)]^T$ 。因为已知 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 有不变维, 设其维数为 d , 则齐次方程组的解空间应为 d 维, 矩阵 A 应有不变秩 $(d_1 + d_2) - d$ 。齐次方程组的解空间由 d 个以下形式的列向量张成

$$\text{col}(a_1(x), \dots, a_{d_1}(x), b_1(x), \dots, b_{d_2}(x))$$

这些向量都是 x 的光滑函数。由结果得知, 在 x_0 邻域, $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 是由 d 个光滑向量场张成的。

3.1.4 分布的对合性

3.1.4.1 分布对合性的定义和性质

定义 3.8 一个光滑分布 Δ , 如果属于 Δ 的任意二向量场 f_i, f_j 的李积 $[f_i, f_j]$ 仍属于 Δ , 即

$$f_i \in \Delta \quad f_j \in \Delta \Rightarrow [f_i, f_j] \in \Delta \quad (3-2)$$

则称分布是对合的(involutive)。

分布对合性实际上就是李积的封闭性。它保证属于 Δ 的任意二向量场 f_i, f_j 在做李积后仍属于 Δ , 不影响分布原来的向量场构成, 基底保持不变。请注意定义中要求 Δ 中任意二向量场的李积都要具有封闭性才能称对合。这不仅要求 $[f_1, f_j] \in \Delta$, 而且也要求 $[f_1, [f_1, f_j]] \in \Delta, [f_2, [f_1, f_j]] \in \Delta, \dots$ 。

按李积定义, 做李积的向量场都是光滑的, 因此讨论对合性时, 所提到的分布都是指光滑分布。

下面给出与分布对合性有关的几个性质。

性质 1 一维分布总是对合的。

事实上, 在一维情况下, 只能是向量场自身做李积, 按李积定义可得

$$[f, f] = \frac{\partial f}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} f = [0] \in \Delta = \text{span}\{f\}$$

性质 2 两对合分布 Δ_1, Δ_2 的交 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 仍对合。

事实上, 如设向量场 $f_1, f_2 \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, 因为 $f_1, f_2 \in \Delta_1$ 和 $f_1, f_2 \in \Delta_2$, 同时 $[f_1, f_2] \in \Delta_1$ 和 $[f_1, f_2] \in \Delta_2$, 所以 $[f_1, f_2]$ 是 Δ_1, Δ_2 的共同向量场, $[f_1, f_2] \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, 于是 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 对合得证。

性质 3 两对合分布 Δ_1, Δ_2 的并 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 一般不是对合的。

此性质有下例为证。

例 3.6 (对合分布的并一般不对合) R^3 上二分布 $\Delta_1 = \text{span}\{f_1\}, \Delta_2 = \text{span}\{f_2\}$, 其中

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

因为是一维的, 所以 Δ_1, Δ_2 分别对合。其并为 $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \text{span}\{f_1, f_2\}$, 因为

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \Delta_1 \cup \Delta_2$$

所以 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 不对合。

3.1.4.2 分布对合的充要条件

定理 3.3 定义在点 x_0 邻域 U 上的 d 维非奇异光滑分布 $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_d\}$, 其中 f_1, \dots, f_d 是张成 Δ 的光滑(基底)向量场。分布 Δ 对合的充要条件是

$$[f_i, f_j] \in \Delta \quad \forall 1 \leq i, j \leq d \quad (3-3)$$

证明 (必要性) 因为 f_1, \dots, f_d 是 Δ 中的向量场, 所以必要性是显然的。

(充分性) 取任意二向量场 $\tau_1(x), \tau_2(x) \in \Delta$, 由定理 3.1, 它们可表示为

$$\tau_1(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x) \quad \tau_2(x) = \sum_{j=1}^d d_j(x) f_j(x)$$

我们要证明的是, 只要式(3-3)成立, 就有 $[\tau_1, \tau_2] \in \Delta$ 成立。因为

$$[\tau_1, \tau_2] = \left[\sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x), \sum_{j=1}^d d_j(x) f_j(x) \right] = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d [c_i f_i, d_j f_j]$$

引用展开公式(2-36)得

$$[\tau_1, \tau_2] = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \{ c_i d_j [f_i, f_j] + c_i (L_{f_j} d_j) f_j - d_j (L_{f_i} c_i) f_i \}$$

可知右端 $[f_i, f_j], f_i, f_j \in \Delta$, 所以 $[\tau_1, \tau_2] \in \Delta$ 成立, 定理得证。

此定理说明, 要证明一个分布的对合性, 只需要证明张成分布的 d 个基底向量场相互做李积满足对合条件就够了。

例 3.7 (用定理 3.3 判断对合性) 域 $U = \{x \in R^3 : x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$ 上定义一分布 $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$, 二维, 其中

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

计算

$$[f_1, f_2] = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2f_1 \in \Delta$$

满足定理 3.3 的充要条件, Δ 对合。

定理 3.4 定义在点 x_0 邻域 U 上的 d 维非奇异光滑分布 $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_d\}$, 其中 f_1, \dots, f_d 是张成 Δ 的光滑(基底)向量场。分布 Δ 对合的充要条件是

$$\text{rank}\{f_1 \ \cdots \ f_d \ [f_i, f_j]\} = d \quad \forall 1 \leq i, j \leq d \quad (3-4)$$

证明 (必要性) 根据对合定义, $[f_i, f_j] \in \Delta$, 故 $[f_i, f_j]$ 不引起 Δ 增维, 式(3-4)成立。

(充分性) $[f_i, f_j]$ 不引起 Δ 增维, 故 $[f_i, f_j] \in \Delta$, 按定义, Δ 对合。

例 3.8 (分布对合性判断的矩阵方法) R^3 上二维分布 $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$, 其中

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可求得

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为判断对合性, 计算

$$[f_1, f_2, [f_1, f_2]] = \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

其秩为 3, 大于 $\dim(\Delta) = 2$, 所以 Δ 不对合。

3.1.4.3 对合闭包 $\text{inv}(\Delta)$

如果分布 Δ 不对合, 在必要时往往用比 Δ 所含向量场略多的 $\text{inv}(\Delta)$ 来近似代替 Δ , 以便引用一些要求分布对合的定理。下面给出其定义。

定义 3.9 所有包含分布 Δ 的对合分布之交是一分布,称为 Δ 的对合闭包(involution closure),记为 $\text{inv}(\Delta)$ 或 $\bar{\Delta}$ 。

从定义出发,易证明 $\text{smt}(\Delta)$ 有以下性质。

性质 1 $\text{inv}(\Delta)$ 是包含 Δ 的对合分布。

性质 2 $\text{inv}(\Delta)$ 是包含 Δ 的对合分布中维数最小的,而且是唯一的。

性质 3 $\text{inv}(\Delta)$ 是包含 Δ 的最小李积封闭包。

3.2 对偶分布

3.2.1 对偶分布的定义

在定义对偶分布之前,注意定义 2.14 曾指定用符号 $T^*(N)$ 表示流形 N 上所有点对偶空间的集合。

定义 3.10 流形 N 上的一个对偶分布(codistribution) Ω 指的是一个映射 $\Omega: N \rightarrow T^*(N)$,它给每点 $p \in N$ 指定一个 $\Omega_p \subset T_p^*N$, Ω_p 是 p 点对偶空间 T_p^*N 的一个子空间。

对偶分布 Ω 可表示为

$$\Omega(p) = \text{span}\{\omega_1(p), \dots, \omega_d(p)\} \quad p \in U \subset N \quad (3-5)$$

或

$$\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$$

式中, $\omega_1, \dots, \omega_d$ 是定义在 N 上的 d 个对偶向量场。如果 $\omega_1, \dots, \omega_d$ 都是独立对偶向量场,则 $d \leq n$ 。

定义 3.11 域 U 上的集合运算:

对偶分布的并(union): $(\Omega_1 \cup \Omega_2)(p) = \Omega_1(p) \cup \Omega_2(p) \quad p \in U;$

对偶分布的交(intersection): $(\Omega_1 \cap \Omega_2)(p) = \Omega_1(p) \cap \Omega_2(p) \quad p \in U;$

对偶向量场 $\omega \in \Omega$: 指对所有点 $p \in U$ 有 $\omega(p) \in \Omega(p)$;

对偶分布 $\Omega_1 \subset \Omega_2$: 指对所有点 $p \in U$ 有 $\Omega_1(p) \subset \Omega_2(p)$ 。

3.2.2 对偶分布的奇异性和正则性

定义 3.12 p 点对偶子空间 $\Omega(p)$ 的维数称为对偶分布 Ω 在 p 点的维数(dimension),记为 $\dim(\Omega(p))$ 。

定义 3.13 如果对开集 U 上任意点 $p \in U$ 来说,都有 $\dim(\Omega(p)) = d$, d 为确定整数,则称定义在 U 上的对偶分布 Ω 是非奇异的(nonsingular),反之称为奇异的(singular)。

定义 3.14 如果 U 上的 p 点存在邻域 U_0 , 在 U_0 上 Ω 非奇异,则称 p 为对偶分布 Ω 的正则点(regular point),否则称为奇异点(point of singularity)。

例 3.9 (对偶分布的正则点和奇异点)在 R^2 上定义二对偶分布

$$\Omega_1 = \text{span}\{[1 \quad 1]\}$$

$$\Omega_2 = \text{span}\{[1+x_1 \quad 1]\}$$

可求得二对偶分布之交为

$$(\Omega_1 \cap \Omega_2)(x) = \begin{cases} 0 & x_1 \neq 0 \\ \Omega_1(x) & x_1 = 0 \end{cases}$$

按定义, $x_1 = 0$ (即 x_2 轴) 上各点分别是 Ω_1, Ω_2 的正则点, 但它们都不是 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 的正则点, 而是奇异点, 因为这些点都找不到邻域, 使 U 上各点维数相等。

性质 1 定义在 U 上的对偶分布 Ω 的全部正则点的集合 (各正则点不一定同维) 是 U 上的开集和稠子集。

事实上, 开集是显然的, 否则边界上的点找不到全部为正则点的邻域, 不可能是正则点。稠子集的结果可用反证法得到。如果不是稠子集, 则必存在区域 $V \subset U$, 在 V 上任何点都找不到随便是多么小的同维邻域, 对于无限可分割的连续域来说, 这是不成立的。

3.2.3 对偶分布的光滑性

3.2.3.1 对偶分布光滑性定义及其性质

定义 3.15 如果对偶分布 Ω 是由一些 C^∞ 对偶向量场, 以 C^∞ 函数为系数张成, 则称 Ω 为光滑对偶分布 (smooth codistribution), 或称 C^∞ 对偶分布 (C^∞ codistribution)。

按定义, 光滑对偶分布的每个分量, 作为一个函数都是光滑的。此外, 光滑对偶分布具有下列性质。

性质 1 两光滑对偶分布的并仍是光滑对偶分布。

事实上, 如果 Ω_1 由光滑向量场 $\omega_1, \dots, \omega_k$ 张成, Ω_2 由光滑向量场 $\theta_1, \dots, \theta_l$ 张成, 则 $\Omega_1 + \Omega_2$ 就由光滑向量场 $\omega_1, \dots, \omega_k, \theta_1, \dots, \theta_l$ 张成, 所以 $\Omega_1 + \Omega_2$ 光滑。

性质 2 两光滑对偶分布的交不一定是光滑对偶分布。

此性质有下列例为证。

例 3.10 (光滑对偶分布的交) 在 R^2 上定义的二对偶分布 Ω_1, Ω_2 同例 3.9, 其交已在例 3.9 中求得。除 x_2 轴之外, 对偶分布的交均取零值, x_2 轴上的点不光滑。

3.2.3.2 光滑对偶分布正则点邻域的基底向量场

下面的定理说明, 光滑对偶分布正则点的邻域必能找到基底向量场。

定理 3.5 设 Ω 是一光滑对偶分布, x_0 是 Ω 的正则点, $\dim(\Omega(x_0)) = d$, 则 x_0 必有开邻域 U_0 , 在其上可找到光滑对偶向量场集合 $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ 构成基底, 使属于 Ω 的 U_0 上的任一光滑向量场 θ 可表示为

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) \omega_i(x) \quad (3-6)$$

式中, $c_1(x), \dots, c_d(x)$ 是在 U_0 上有定义的 x 的光滑函数。

证明 参见定理 3.1 的证明。

3.2.3.3 光滑对偶分布的交仍光滑的条件

下面的定理说明, 光滑对偶分布的交也光滑的条件是交在该点正则。

定理 3.6 设 Ω_1, Ω_2 光滑, 如果 x_0 是对偶分布 Ω_1, Ω_2 和 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 的正则点, 则存在 x_0 的邻域 U_0 , 在其上 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 光滑。

证明 请参见定理 3.2 的证明。

3.3 正交对偶分布和正交分布

3.3.1 正交对偶分布

3.3.1.1 正交对偶分布的定义和对偶性质

定义 3.16 给定一分布 Δ , 它定义于 R^n 的开集 U 。在每点 $x \in U$ 能零化 $\Delta(x)$ 各切向量的正交对偶向量的全体被集合为 $\Delta^\perp(x)$, 称为分布 $\Delta(x)$ 的正交对偶分布 (orthogonal codistribution) 或称为分布 $\Delta(x)$ 的零化子 (annihilator), 其数学表示为

$$\Delta^\perp(x) = \{\omega \in T^*(R^n) : \langle \omega, v \rangle = 0, \forall v \in \Delta(x)\} \quad (3-7)$$

按定义, 在每点 x , $\Delta^\perp(x)$ 构成 $\Delta(x)$ 的正交对偶子空间, $\Delta^\perp(x)$ 和 $\Delta(x)$ 构成全部空间; 在整个 U 上, $\Delta^\perp(x)$ 是 $\Delta(x)$ 的正交对偶分布。按集合论的对偶原理, $\Delta^\perp(x)$ 与 $\Delta(x)$ 的互补性决定了它们有如下的对偶性质。

性质 1 $\Delta^\perp(x)$ 与 $\Delta(x)$ 的维数之和等于空间维数 n 。

性质 2 $\Delta_1 \supset \Delta_2$ 当且仅当 $\Delta_1^\perp \subset \Delta_2^\perp$ 。

性质 3 $(\Delta_1 \cap \Delta_2)^\perp = \Delta_1^\perp \cup \Delta_2^\perp$ 。

3.3.1.2 正交对偶分布的非奇异性

在非奇异性方面, 根据对偶性质 1, 易证正交对偶分布具有如下性质。

性质 1 设 x^0 是分布 Δ 的正则点, 则 x^0 也是正交对偶分布 Δ^\perp 的正则点。

3.3.1.3 正交对偶分布的光滑性

在光滑性方面, 正交对偶分布具有如下性质。

性质 1 光滑分布的正交对偶分布未必光滑。

此性质有下例为证。

例 3.11 (光滑分布的正交对偶分布未必光滑) 在 R^1 上定义的光滑分布 $\Delta = \text{span}\{x\}$, 其正交对偶分布是

$$\Delta^\perp(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ T^*(R^1) & x = 0 \end{cases}$$

式中, $T^*(R^1)$ 是 R 上所有对偶向量的集合, 这里用来表示 R 上的任何一维对偶向量, 可见 $\Delta^\perp(x)$ 可能不光滑。

性质 2 不光滑分布的正交对偶分布可能是光滑的。

例 3.12 (不光滑分布的正交对偶分布可能光滑) 由例 3.5 我们已经知道, 分布

$$\Delta_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \Delta_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1+x_1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

之交

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \begin{cases} 0 & x_1 \neq 0 \\ \Delta_1(x) & x_1 = 0 \end{cases}$$

是一个不光滑分布。让我们来求它的正交对偶分布, 其结果是

$$\Delta^\perp = (\Delta_1 \cap \Delta_2)^\perp = \begin{cases} T^*(R^2) & x_1 \neq 0 \\ \text{span}\{1, -1\} & x_1 = 0 \end{cases}$$

虽然这一结果中 Δ^\perp 不是在所有情况下都是光滑的,但至少被包括其中的下面一个正交对偶分布是光滑的

$$\Delta^\perp = \text{span}\{(1, -1), (1, -(1+x_1))\}$$

性质 3 光滑分布 Δ 的正交对偶分布 Δ^\perp 仍保持光滑的条件是 Δ 非奇异。

前面的性质 1 表明,光滑分布 Δ 的正交对偶分布 Δ^\perp 未必光滑。如果补充 Δ 非奇异的条件,则可保证 Δ^\perp 光滑。

3.3.2 正交分布

3.3.2.1 正交分布的定义和对偶性

定义 3.17 给定一对偶分布 Ω ,它定义于 R^n 的开集 U 。在每点 $x \in U$ 能零化 $\Omega(x)$ 各对偶向量的切向量的全体被集合为 $\Omega^\perp(x)$,称为对偶分布 $\Omega(x)$ 的正交分布(orthogonal distribution)或称对偶分布 $\Omega(x)$ 的零化子(annihilator),其数学表示为

$$\Omega^\perp(x) = \{v \in T(R^n) : \langle \omega, v \rangle = 0, \forall \omega \in \Omega(x)\} \quad (3-8)$$

按定义,在每点 x , $\Omega^\perp(x)$ 构成 $\Omega(x)$ 的正交切空间, $\Omega^\perp(x)$ 和 $\Omega(x)$ 构成全部空间;在整个 U 上, $\Omega^\perp(x)$ 是 $\Omega(x)$ 的正交对偶分布。按集合论的对偶原理, $\Omega^\perp(x)$ 与 $\Omega(x)$ 的互补性决定了它们有如下的对偶性质。

性质 1 $\Omega^\perp(x)$ 与 $\Omega(x)$ 的维数之和等于空间维数 n 。

性质 2 $\Omega_1 \supset \Omega_2$ 当且仅当 $\Omega_1^\perp \subset \Omega_2^\perp$ 。

性质 3 $(\Omega_1 \cap \Omega_2)^\perp = \Omega_1^\perp \cup \Omega_2^\perp$ 。

3.3.2.2 正交对偶分布的非奇异性

在非奇异性方面,根据对偶性质 1,易证正交分布具有如下性质。

性质 1 设 x^0 是对偶分布 Ω 的正则点,则 x^0 也是正交分布 Ω^\perp 的正则点。

3.3.2.3 正交分布的光滑性

在光滑性方面,与正交对偶分布的光滑性一节类似,正交分布具有如下性质。

性质 1 光滑对偶分布 Ω 的正交分布 Ω^\perp 未必光滑。

性质 2 不光滑对偶分布 Ω 的正交分布 Ω^\perp 可能是光滑的。

性质 3 光滑对偶分布 Ω 的正交分布 Ω^\perp 仍保持光滑的条件是 Ω 非奇异。

性质 3 表明,虽然光滑分布 Δ 的正交对偶分布 Δ^\perp 未必光滑,但如果补充 Δ 非奇异的条件,则可保证 Δ^\perp 光滑。

第4章 不变分布和不变对偶分布

本章介绍不变分布和不变对偶分布概念。对不变分布,阐述了分布不变性与对合的关系和不变分布的性质,给出了分布不变的充要条件。对不变对偶分布,阐述了分布不变性与其正交对偶分布不变性的关系,给出了对偶分布不变的充要条件。本章是基于第3章分布和对偶分布概念展开的,同时又为下一章研究不变最小分布和不变最小对偶分布奠定基础。不变分布和不变对偶分布的一个应用是8.3节基于不变分布和不变对偶分布的系统能控和能观分解。

4.1 不变分布

4.1.1 不变分布的定义

不变分布是和对合平行的概念。不变分布和对合都可以表达李积的封闭性,但两者又不尽相同。不变分布除可表达分布 Δ 自身的李积封闭性以外,还可以用来表示一分布 Δ 和 Δ 外向量场共同张成的分布的李积封闭性。不变分布概念和对合概念同等重要,它们都和分布的可积性紧密相关。

在以下定义中,假定 Δ 是一给定分布, f 是一向量场, Δ 和 f 都定义在开集 $U \in R^n$ 上,但 f 既可能是 Δ 内向量场,也可能是 Δ 外向量场。

定义 4.1 定义一个分布集合记号 $[f, \Delta]$,它所包含的分布可表示为

$$[f, \Delta] = \text{span}\{[f, \tau] : \tau \in \Delta\}$$

按此定义, $[f, \Delta] \subset \Delta$ 的含义是,对每个 $\tau \in \Delta$ 都有 $[f, \tau] \in \Delta$ 。

定义 4.2 设 f 是 Δ 内向量场,或 Δ 外向量场,如果 $[f, \Delta] \subset \Delta$,即

$$\tau \in \Delta \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta \quad (4-1)$$

则称分布 Δ 是在向量场 f 下不变的(invariant under a vector field f)或称分布 Δ 是不变分布(invariant distribution)。

定义表明,在向量场 f 下不变的分布 Δ 具有的特征是:在扩充 $[f, \Delta]$ 之后, Δ 本身保持不变。

在给定向量场下不变分布的定义还可推广到含不光滑向量场的分布。对此种分布 Δ ,定义条件应相应地修改为 $[f, \text{smt}(\Delta)] \subset \Delta$,但因为 $[f, \text{smt}(\Delta)]$ 是一个光滑分布,此条件又等价于 $[f, \text{smt}(\Delta)] \subset \text{smt}(\Delta)$,于是得到下面的定义。

定义 4.3 设 f 是 Δ 内向量场,或 Δ 外向量场,如果 $[f, \text{smt}(\Delta)] \subset \text{smt}(\Delta)$,即

$$\tau \in \text{smt}(\Delta) \Rightarrow [f, \tau] \in \text{smt}(\Delta) \quad (4-2)$$

则称分布 Δ 是在向量场 f 下不变的。

4.1.2 分布不变性与对合的关系

首先,不变性可表示 Δ 内部各向量场的对合性。例如,设 $\Delta = \text{span}\{\tau_1, \tau_2\}$, 则说 Δ 在 τ_1 下不变就等于说 Δ 对合。又例如,如果 $\Delta = \text{span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, 则说 Δ 在 τ_1 和 τ_2 (可取 τ_1, τ_2, τ_3 中任意两个) 下不变, 等于说 Δ 对合。但是,这种替代说法是有条件的,比如,对 $\Delta = \text{span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, 只说 Δ 在 τ_1 下不变不等于说 Δ 对合,因为这只能保证 $[\tau_1, \tau_2] \in \Delta$ 和 $[\tau_1, \tau_3] \in \Delta$, 但不足以保证 $[\tau_2, \tau_3] \in \Delta$ 。另一个与非线性控制系统关系密切的例子是,对系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

来说,分布 $\Delta = \text{span}\{f, g_1, \dots, g_m\}$ 在 f, g_1, \dots, g_m 下不变,或说 Δ 在 g_1, \dots, g_m 下不变,都等于说 Δ 对合。

其次,不同于对合的是,不变性还可表示 Δ 与 Δ 以外向量场 f 共同张成的分布的对合性。例如,设分布 $\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ 对合, f 是 Δ 以外的向量场,则说 Δ 在 f 下不变,等于说 Δ 和 f 共同张成的分布 $\Delta' = \text{span}\{f, g_1, \dots, g_m\}$ 是对合的。

4.1.3 分布不变性的几个性质

性质 1 若 Δ 是在 f_1, f_2 下不变的分布,则 Δ 也是在 $[f_1, f_2]$ 下不变的分布。

证明 设 τ 是 Δ 中一向量场,由李括号的 Jacobi 恒等式知

$$[[f_1, f_2], \tau] = [f_1, [f_2, \tau]] - [f_2, [f_1, \tau]]$$

因为 Δ 在 f_1, f_2 下不变,所以 $[f_1, \tau] \in \Delta, [f_2, \tau] \in \Delta$, 进而 $[f_1, [f_2, \tau]] \in \Delta, [f_2, [f_1, \tau]] \in \Delta$, 代入 Jacobi 恒等式,得 $[[f_1, f_2], \tau] \in \Delta$, Δ 在 $[f_1, f_2]$ 下不变得证。

性质 2 若 Δ_1, Δ_2 都是在 f 下不变的分布,则其交 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 也是在 f 下不变的分布。

证明 设 f 是 Δ_1, Δ_2 内部或外部的向量场, τ 是 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 中任意向量场。由假设,已知 $[f, \Delta_1] \subset \Delta_1, [f, \Delta_2] \subset \Delta_2$, 即对所有 $\tau \in \Delta_1$ 都有 $\tau \in \Delta_1 \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta_1$, 对所有 $\tau \in \Delta_2$ 都有 $\forall \tau \in \Delta_2 \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta_2$ 。所以,对所有 $\tau \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ 都有

$$\tau \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta_1 \cap \Delta_2$$

即 $[f, \Delta_1 \cap \Delta_2] \subset \Delta_1 \cap \Delta_2$, 得证。

性质 3 如果光滑分布 Δ 在向量场 f 下不变,则 $\Omega = \Delta^\perp$ 也在 f 下不变。

证明 设 Δ 在 f 下不变, τ 是 Δ 中的任意向量场,则 $[f, \tau] \in \Delta$ 。设 ω 是 $\Omega = \Delta^\perp$ 中的任意对偶向量场,要证明的是 $L_f \omega \in \Omega$ 。

按 $\Omega = \Delta^\perp$ 条件, $\langle \omega, \tau \rangle = 0$, 又有 $\langle \omega, [f, \tau] \rangle = 0$ 。由恒等式(2-38)得

$$\langle L_f \omega, \tau \rangle = L_f \langle \omega, \tau \rangle - \langle \omega, [f, \tau] \rangle = 0$$

这证明了 $L_f \omega$ 是 Ω 中的一个对偶向量场,即 $L_f \Omega \subset \Omega$ 。

4.1.4 分布 Δ 在 f 下不变的充要条件

定理 4.1 设分布 Δ 非奇异, d 维,由 τ_1, \dots, τ_d 张成,则 Δ 在 f 下不变的充要条件是

$$[f, \tau_i] \in \Delta \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

并有以下关系式成立

$$\Delta + [f, \Delta] = \text{span}\{\tau_1, \dots, \tau_d, [f, \tau_1], \dots, [f, \tau_d]\} \quad (4-3)$$

证明 (必要性)因为 τ_1, \dots, τ_d 都是 Δ 的向量场,按 Δ 在 f 下不变的定义即得。(充分性)由定理 3.1,可把 Δ 的每个向量场 τ 表示为(至少是局部地)

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) \tau_i(x)$$

式中, τ_1, \dots, τ_d 是张成 Δ 的向量场。把此式代入下式,并注意要使用恒等式(2-36),得

$$[f, \tau] = \sum_{i=1}^d c_i [f, \tau_i] + \sum_{i=1}^d (L_f c_i) \tau_i \quad (4-4)$$

而右端都是 Δ 的向量场。充分性得证。

由 $[f, \Delta]$ 定义,并把式(4-4)代入可见

$$[f, \Delta] = \text{span}\{[f, \tau] : \tau \in \Delta\} \supset \text{span}\{[f, \tau_1], \dots, [f, \tau_d]\}$$

此式左右两端虽然一般不相等,但都属于分布 Δ ,左右各加上分布 Δ 后,两端分布必然相等,于是得

$$\Delta + [f, \Delta] = \text{span}\{\tau_1, \dots, \tau_d, [\tau, \tau_1], \dots, [f, \tau_d]\}$$

定理证毕。

4.2 不变对偶分布

4.2.1 不变对偶分布的定义

迄今为止,我们只是对分布给出了对合的定义,并未给出过对偶分布的李积和对合的定义。但是,对偶分布的不变性却是有定义的。定义对偶分布不变性的目的是,通过它间接地研究分布的不变性或对合性,为研究可积性服务。

在以下定义中,假定 Ω 是一给定对偶分布, f 是一向量场, Ω 和 f 都定义在开集 $U \in R$ 上。

定义 4.4 定义一个对偶分布集合记号 $L_f \Omega$,它所包含的对偶分布可表示为

$$L_f \Omega = \text{span}\{L_f \omega : \omega \in \Omega\}$$

按此定义, $L_f \Omega \subset \Omega$ 的含义是,对每个 $\omega \in \Omega$ 都有 $L_f \omega \in \Omega$ 。

定义 4.5 如果 $L_f \Omega \subset \Omega$,即

$$\omega \in \Omega \Rightarrow L_f \omega \in \Omega \quad (4-5)$$

则称对偶分布 Ω 是在向量场 f 下不变的(invariant under a vector field f)。

在给定向量场下不变的定义还可推广到含不光滑对偶向量场的分布。对此种对偶分布 Ω ,定义条件应相应地修改为 $L_f \text{smt}(\Omega) \subset \Omega$,但因为 $L_f \text{smt}(\Omega)$ 是一个光滑对偶分布,所以此条件又等价于 $L_f \text{smt}(\Omega) \subset \text{smt}(\Omega)$,于是得下面的定义。

定义 4.6 设 f 是 Δ 内向量场,或 Δ 外向量场,如果 $L_f \text{smt}(\Omega) \subset \text{smt}(\Omega)$,即

$$\omega \in \text{smt}(\Omega) \Rightarrow L_f \omega \in \text{smt}(\Omega) \quad (4-6)$$

则称分布 Δ 是在向量场 f 下不变的。

4.2.2 对偶分布不变性的性质

性质 1 如果一光滑对偶分布 Ω 在向量场 f 下不变, 则 $\Delta = \Omega^\perp$ 也在 f 下不变。

证明 设 Ω 在 f 下不变, ω 是 Ω 中的任意对偶向量场, 则 $L_f\omega \in \Omega$ 。设 τ 是 $\Delta = \Omega^\perp$ 中的任意向量场, 要证明的是 $[f, \tau] \in \Delta$ 。

按条件 $\Delta = \Omega^\perp$, 有 $\langle \omega, \tau \rangle = 0$, 又有 $\langle L_f\omega, \tau \rangle = 0$ 。由恒等式(2-38)得

$$\langle \omega, [f, \tau] \rangle = L_f \langle \omega, \tau \rangle - \langle L_f\omega, \tau \rangle = 0$$

这就证明了 $[f, \tau]$ 是 Δ 中的一个向量场, 即 $[f, \tau] \in \Delta$ 。

4.2.3 对偶分布 Ω 在 f 下不变的充要条件

定理 4.2 设对偶分布 Ω 非奇异, d 维, 由 $\omega_1, \dots, \omega_d$ 张成, 则 Ω 在 f 下不变的充要条件是

$$L_f\omega_i \in \Omega \quad \forall 1 \leq i < d$$

且以下关系式成立

$$\Omega + L_f\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_d, L_f\omega_1, \dots, L_f\omega_d\} \quad (4-7)$$

证明 (必要性) 因为 $\omega_1, \dots, \omega_d$ 都是 Ω 的对偶向量场, 所以必要性成立。

(充分性) 由定理 3.5, 可把 Ω 的每个对偶向量场 ω 表示为(至少是局部地)

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) \omega_i(x)$$

式中, $\omega_1, \dots, \omega_d$ 是张成 Ω 的对偶向量场。把此式代入下式, 并注意要使用恒等式(2-37)得

$$L_f\omega = \sum_{i=1}^d c_i L_f\omega_i + \sum_{i=1}^d (L_fc_i) \omega_i \quad (4-8)$$

而右端都是 Ω 的对偶向量场。充分性得证。

由 $L_f\Omega$ 定义, 并把式(4-8)代入, 有

$$L_f\Omega = \text{span}\{L_f\omega : \omega \in \Omega\} \supset \text{span}\{L_f\omega_1, \dots, L_f\omega_d\}$$

此式左右两端虽然一般不相等, 但都属于对偶分布 Ω , 左右各加上对偶分布 Ω 后, 两端对偶分布必然相等, 于是得

$$\Omega + L_f\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_d, L_f\omega_1, \dots, L_f\omega_d\}$$

全定理证毕。

第 5 章 不变最小分布和 不变最小对偶分布

本章阐述不变最小分布和不变最小对偶分布概念,对不变最小分布,给出了不变最小分布的序列生成方法和递推终止条件,讨论了不变最小分布的存在性、非奇异性、光滑性、对合性。对不变最小对偶分布,给出了不变最小对偶分布的序列生成方法和递推终止条件,讨论了不变最小对偶分布的存在性、非奇异性、光滑性、对合性。本章是基于第 4 章不变分布和不变对偶分布概念展开的。不变最小分布和不变最小对偶分布的一个应用是 8.4 节基于不变最小分布和不变最小对偶分布的系统能控和能观分解。这有别于 8.3 节的系统分解。

本章对不变最小分布和不变最小对偶分布的讨论是一般的和通用的,目的在于提供数学基础。明确针对非线性控制系统建立的不变最小分布(如 P 分布和 R 分布)和不变最小对偶分布(如 Q 分布)属应用性质问题,不在本章讨论,而放在后面的第 8 章等章节。

5.1 不变最小分布

5.1.1 不变最小分布的定义

定义 5.1 设在 R^n 的一开集 U 中定义有一组分布 D ,如其中一分布被包含在 D 的所有其它分布中,则称之为**最小分布**(smallest distribution)。

定义 5.2 设 Δ 是定义在 R^n 一开集 U 上的一光滑分布, τ_1, \dots, τ_q 是定义在 U 上的向量场。所有包含 Δ 并在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的分布构成分布族,其中的最小分布被称为**包含 Δ 、在向量场 τ_1, \dots, τ_q 下不变的最小分布**(smallest distribution which contains and is invariant under the vector field τ_1, \dots, τ_q),记为 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。

为概念明确,有以下几点应予以说明。首先,定义 5.2 中的“在 τ_1, \dots, τ_q 下不变”是指在 Δ 的基础上,经扩充后才在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的,因此,在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的是 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$,而不是 Δ 。注意,这里所说的扩充是指对向量场的扩充,不是指对开集 U 的扩充。其次,所作的扩充要最小。不最小时,除 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 外,还可能包含其它向量场或分布。再次,在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,不意味着必然 $\tau_1, \dots, \tau_q \in \Delta$ 或 $\tau_1, \dots, \tau_q \in \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。只有 $\tau_i \in \Delta$,才必然有 $\tau_i \in \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。最后,应特别注意的是,这里所说的 Δ 与不变分布提到的 Δ 不同。这里是指未扩充前的 Δ ,而不变分布提到的 Δ 是指扩充后的 Δ 。比如,把不变最小分布 $\langle \tau_i | \Delta \rangle$ 中的 Δ 和在 τ_i 下不变分布的 Δ 相比,后一个 Δ 一般较大。

5.1.2 不变最小分布的存在性和光滑性

定理 5.1 设 Δ 是定义在 U 上的一个光滑分布, τ_1, \dots, τ_q 是定义在 U 上的光滑向量

场,则在包含 Δ 并在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的分布族全族 D 中,必存在一个不但最小而且光滑的分布。

证明 所讨论分布族显然是非空的。如 Δ_1 和 Δ_2 是此族中二元素,则其交 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 包含 Δ 和在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,也是此族中一分布。这表明,族中所有分布的交 $\hat{\Delta}$ 包含 Δ 并在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,并被包含在族中任意其它分布中, $\hat{\Delta}$ 就是族中的最小元素。

下面证明不变最小分布是光滑的。如果 $\hat{\Delta}$ 光滑,则 $\hat{\Delta}$ 为所求最小而且光滑的分布;如果 $\hat{\Delta}$ 不光滑,则转而使用不变性定义 4.3。按该定义,要求满足

$$[\tau_i, \text{smt}(\hat{\Delta})] \subset \hat{\Delta} \quad (5-1a)$$

$$\text{或等价式} \quad [\tau_i, \text{smt}(\hat{\Delta})] \subset \text{smt}(\hat{\Delta}) \quad (5-1b)$$

$$\text{或写成} \quad \tau \in \text{smt}(\hat{\Delta}) \Rightarrow [\tau_i, \tau] \in \text{smt}(\hat{\Delta}) \quad (5-1c)$$

这里 $\text{smt}(\hat{\Delta})$ 光滑, $\text{smt}(\hat{\Delta}) \subset \hat{\Delta}$ 。下面证明 $\text{smt}(\hat{\Delta})$ 就是包含 Δ 且在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的最小而且光滑的分布。由假设已知 Δ 光滑,故 $\text{smt}(\hat{\Delta})$ 包含 Δ ; 因 $\text{smt}(\hat{\Delta}) \subset \hat{\Delta}$, 而 $[\tau_i, \hat{\Delta}] \subset \hat{\Delta}$, 知 $\text{smt}(\hat{\Delta})$ 满足式(5-1a), 即 $\text{smt}(\hat{\Delta})$ 在 τ_1, \dots, τ_q 下不变。因为 $\text{smt}(\hat{\Delta})$ 就是所求最小而且光滑的分布 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$, 所以不变最小分布存在且光滑。

5.1.3 不变最小分布的生成

5.1.3.1 不变最小分布的生成序列

不变最小分布可用构造法生成,下面介绍构造方法。给定条件是,已知定义在 U 上的一个光滑分布 Δ 和定义在 U 上的一个光滑向量场集合 τ_1, \dots, τ_q 。

依据不变最小分布的定义,设计了如下的不减递推序列,称之为不变最小分布的生成序列

$$\Delta_0 = \Delta \quad (5-2a)$$

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_{k-1}] \quad (5-2b)$$

此生成序列所构造的不变最小分布保证了包含 Δ 和在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,也保证了最小,并且可保证以有限次递推得到 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 的结果。计算时 $k=0$ 也是可能的,比如说,出发时 $\Delta_0 = \Delta = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 的情况。应当注意的是,生成算法不要求分布和向量场非奇异,算法对含奇异点的情况也适用。

5.1.3.2 不变最小分布生成序列的递推终止条件

定理 5.2 式(5-2)算法所生成的分布 Δ_k 对所有 k 满足

$$\Delta_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$$

并且,当有一整数 k^* 使 $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$ 被满足时,计算终止,将得到结果

$$\Delta_{k^*} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \quad (5-3)$$

证明 设 Δ' 是包含 Δ 且在向量 τ_1, \dots, τ_q 场下不变的任一分布。首先证明,如果 $\Delta' \supset \Delta_k$, 则 $\Delta' \supset \Delta_{k+1}$ 。按生成序列,并注意到定义 4.1,得

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= \Delta_k + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_k] = \Delta_k + \sum_{i=1}^q \text{span}\{[\tau_i, \tau] : \tau \in \Delta_k\} \\ &\subset \Delta_k + \sum_{i=1}^q \text{span}\{[\tau_i, \tau] : \tau \in \Delta'\} \subset \Delta' \end{aligned}$$

其次,证明 $\Delta_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。因为 $\Delta' \supset \Delta$, 由 $\Delta_0 = \Delta \subset \Delta'$ 出发, 不停引用上面的结果, 可知, 对所有 k 有 $\Delta' \supset \Delta_k$ 。因为 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 符合 Δ' 条件, 可充作 Δ' , 所以 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \supset \Delta_k$ 。定理前半得证。

设某个 k^* 有 $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$ 。按生成序列, $\Delta_{k^*} \supset \Delta$ 。因为

$$[\tau_i, \Delta_{k^*}] \subset \Delta_{k^*+1} = \Delta_{k^*} \quad 1 \leq i \leq q$$

所以 Δ_{k^*} 是在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的。从构造过程又知, Δ_{k^*} 是最小的。因此, Δ_{k^*} 必与 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 重合。定理证毕。

例 5.1 (线性系统的不变最小分布) 单输入 n 阶线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

求不变最小分布 $\langle Ax, B | \text{span}\{B\} \rangle$ 。取 $\Delta = \text{span}\{B\}$, $\tau_1 = Ax$, $\tau_2 = B$, 按生成序列, 有

$$\Delta_0 = \Delta = \text{span}\{B\}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_0 + [\tau_1, \Delta_0] + [\tau_2, \Delta_0] = \text{span}\{B\} + \text{span}\{[Ax, B]\} + \text{span}\{[B, B]\} \\ &= \text{span}\{B\} + \text{span}\{AB\} = \text{span}\{B, AB\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_1 + [\tau_1, \Delta_1] + [\tau_2, \Delta_1] \\ &= \text{span}\{B, AB\} + \text{span}\{[Ax, B], [Ax, AB]\} + \text{span}\{[B, B], [B, AB]\} \\ &= \text{span}\{B, AB\} + \text{span}\{A^2 B\} = \text{span}\{B, AB, A^2 B\} \end{aligned}$$

\vdots

$$\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} + [\tau_1, \Delta_{n-2}] + [\tau_2, \Delta_{n-2}] = \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1} B\}$$

$$\Delta_n = \Delta_{n-1}$$

最后得

$$\langle Ax, B | \text{span}\{B\} \rangle = Ax | \text{span}\{B\} = \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1} B\} \quad (5-4)$$

从分布观点看, 如果在点 x 把向量场 $B, AB, \dots, A^{n-1} B$ 中的每一个都视为一个坐标系的坐标轴方向, 则它们一起构成了点 x 的一个切空间。当 $\text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] \neq n$ 时, 此切空间是点 x 全 n 维空间的一个子空间。此子空间就是点 x 处在输入 u 控制下向量场切向量方向的可能散布范围, 并称为不变最小分布。

从映射观点看, 如果把 $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]$ 视为一可能不满秩的变换矩阵, 并对所有可能的输入 u 进行变换, 则其像空间 $\text{Im}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B)$ 就是在输入 u 控制下的系统状态的可能活动空间。此空间包含不满秩阵 $[B]$ 变换的像 $\text{Im}(B)$, 包含经可能不满秩的变换阵 A 做有限次重复变换后的像, 并且是最小的, 被称为能控不变子空间。

5.1.4 不变最小分布的非奇异性

如果定义在 U 上的不变最小分布 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 有奇异点, 则使其具有非奇异性的方法是, 把 U 中奇异部分剔除, 通过限制和减小 U 域得到非奇异的不变最小分布 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。设 U_k 是分布 Δ_k 的正则点的集合, 根据分布正则点性质 1 知, U_k 是 U 上的一个开稠集, 取

$$U^* = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_{n-1} \quad (5-5)$$

则 U^* 也是 U 上的一个开稠集。在每点 $x \in U^*$ 的邻域, 分布 $\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1}$ 是非奇异的。

5.1.5 不变最小分布的对合性

5.1.5.1 Δ_k 基底和 Δ_{k-1} 基底间的关系

引理 5.3 在最小不变分布生成序列式(5-2)中, 设分布 Δ_{k-1} 非奇异, 并且 $\Delta_{k-1} = \text{span}\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$, 则 Δ_k 可表示为

$$\Delta_k = \text{span}\{\theta_s, [\tau_i, \theta_s] : 1 \leq s \leq d, 1 \leq i \leq q\} \quad (5-6)$$

事实上, 按式(5-2), 有

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \Delta_{k-1} + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_{k-1}] = \text{span}\{\theta_1, \dots, \theta_d, [\tau_i, \theta_1], \dots, [\tau_i, \theta_d], 1 \leq i \leq q\} \\ &= \text{span}\{\theta_s, [\tau_i, \theta_s] : 1 \leq s \leq d, 1 \leq i \leq q\} \end{aligned}$$

5.1.5.2 张成 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 的基底 $\theta_1, \dots, \theta_d$ 与 τ_1, \dots, τ_q 的关系

引理 5.4 设 Δ 由定义在 U 上的集合 $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ 中的一些向量场张成, 则存在 U 的开稠子流形 U^* , 对每个 $x^0 \in U^*$, 存在 x^0 的一个邻域 V 和 $\dim(\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle(x^0)) = d$ 个向量场 $\theta_1, \dots, \theta_d$, 对所有 $x \in V$ 满足

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle(x) = \text{span}\{\theta_1(x), \dots, \theta_d(x)\} \quad (5-7)$$

而且 $\theta_1, \dots, \theta_d$ 有以下形式

$$\theta_i = [v_r, [v_{r-1}, \dots, [v_1, v_0]]] \quad (5-8)$$

这里 $r \leq n-1$ 是一个(可能与 i 有关的)整数, v_0, \dots, v_r 是 $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ 中向量场, 即在 U 的开稠子流形 U^* 中每点 x 的邻域, $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 由形如式(5-8)形式的向量场张成。

证明 (用数学归纳法)首先, 用非奇异性一节的方法确定 U^* 。设 U_k 是分布 Δ_k 的正则点的集合, 取

$$U^* = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$$

在每点 $x \in U^*$ 的邻域, 分布 $\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1}$ 是非奇异的。

其次, 确定 Δ_k 的维数和基底。记 Δ_k 的维数为 d_k , d_k 可能与 x 有关。如果 x 是 U^* 的一个点, 则 d_k 在 x 附近是常数。由假设, 在 x 附近, Δ_0 由 $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ 中的 d_0 个向量场张成。根据生成序列, 在 x 附近, Δ_k 由 d_k 个如下形式的向量场张成

$$\theta_i = [v_r, [v_{r-1}, \dots, [v_1, v_0]]] \quad 1 \leq i \leq d_k \quad r \leq k$$

式中, v_0, \dots, v_r 是 $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ 中向量场, r 可能与 i 有关。 Δ_k 中任意向量场 τ 在 x 附近可表为

$$\tau = c_1 \theta_1 + \dots + c_{d_k} \theta_{d_k}$$

式中, c_1, \dots, c_{d_k} 是定义在 x 附近的实值光滑函数。

最后, 在此基础上推导 Δ_{k+1} 的基底向量场的形式, 证明其一致性。

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k + \sum_{j=1}^q [\tau_j, \Delta_k]$$

注意到式(2-36)中 $\tau \in \Delta_k$ 与 τ_j 的李积的计算结果为

$$\begin{aligned} [\tau_j, \tau] &= [\tau_j, c_1 \theta_1 + \dots + c_{d_k} \theta_{d_k}] \\ &= c_1 [\tau_j, \theta_1] + \dots + c_{d_k} [\tau_j, \theta_{d_k}] + (L_{\tau_j} c_1) \theta_1 + \dots + (L_{\tau_j} c_{d_k}) \theta_{d_k} \end{aligned}$$

得

$$\Delta_{k+1} = \text{span}\{\theta_i, [\tau_1, \theta_i], \dots, [\tau_q, \theta_i] : 1 \leq i \leq d_k\}$$

因为 Δ_{k+1} 在 x^0 附近非奇异, 可找到 d_{k+1} 个以下形式的向量场

$$\theta_i = [v_r, [v_{r-1}, \dots, [v_1, v_0]]] \quad 1 \leq i \leq d_{k+1} \quad r \leq k+1$$

张成 Δ_{k+1} 。

5.1.5.3 非奇异的 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 是对合的

定理 5.5 设 Δ 由定义在 U 上的向量场 τ_1, \dots, τ_q 中一些向量场张成, 并且 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 在 U^* 上非奇异, 则 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 在 U^* 上是对合的。

证明 如果 σ_1, σ_2 是 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 中任意二向量场, 我们只需证明它们的李括号 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 对所有 $x \in U^*$ 满足 $[\sigma_1, \sigma_2](x) \in \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta(x) \rangle$ 。首先, 把 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 写成适当的形式。引用上面的引理 5.4 的结论, 在 x 的一个邻域 V 中

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle(x) = \text{span}\{\theta_1(x), \theta_d(x)\}$$

式中, θ_i, θ_j 是式(5-8)形式的向量场。所以可得到

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \left[\sum_{i=1}^d c_i^1 \theta_i, \sum_{j=1}^d c_j^2 \theta_j \right] \in \text{span}\{\theta_i, \theta_j, [\theta_i, \theta_j] : 1 \leq i, j \leq d\} \quad (5-9)$$

其次, 只需证明 $[\theta_i, \theta_j] \in \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。因为 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 在 τ_1, \dots, τ_q 下不变, 所以根据 4.1 节分布不变性的性质 1, $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 在 $[\tau_i, \tau_j]$ 下也不变。因为每个 θ_i 是由 τ_1, \dots, τ_q 构成的有限多层李括号, 所以, $[\theta_i, \theta_j] \in \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ 。定理得证。

5.2 不变最小对偶分布

5.2.1 不变最小对偶分布的定义

定义 5.3 设 C 是定义在 R^n 的一开集 U 上的一组对偶分布, 如果其中一对偶分布被包含在 C 的所有其它对偶分布中, 则称之为最小对偶分布(smallest codistribution)。

定义 5.4 设在 R^n 的一开集 U 中定义有一组分布 D , 如果其中一分布包含 D 中所有其它分布, 则称之为最大分布(maximal distribution)。

定义 5.5 设 Ω 是定义在 R^n 一开集 U 上的一光滑对偶分布, τ_1, \dots, τ_q 是 U 上一给定向量场集合。所有包含 Ω 并在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的对偶分布构成对偶分布族, 其中的最小对偶分布被称为包含 Ω 、在向量场 τ_1, \dots, τ_q 下不变的最小对偶分布(smallest codistribution which contains Ω and is invariant under the vector field τ_1, \dots, τ_q), 记为 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 。而称 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ 为被包含在 Ω^\perp 中、在向量场 τ_1, \dots, τ_q 下不变的最大分布(maximal distribution which is contained in Ω^\perp and is invariant under the vector field τ_1, \dots, τ_q)。

为概念明确, 以下几点应予以说明。首先, 以上定义中的“在 τ_1, \dots, τ_q 下不变”是指在 Ω 的基础上经扩充后才在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的, 因此, 在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的是 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$, 而不是 Ω 。这里所说的扩充是指对对偶向量场的扩充, 不是指对开集 U 的扩充。其次, 所作的扩充要最小。不最小时, 除 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 外, 还可能包含其它对偶向量场或对偶分布。最后,

应特别注意的是,这里所说的 Ω 与不变对偶分布提到的 Ω 不同。这里是指未扩充前的 Ω ,而那里是指扩充后的 Ω 。比如,把不变最小对偶分布 $\langle \tau_i | \Omega \rangle$ 中的 Ω 和在 τ_i 下不变的对偶分布的 Ω 相比,后一个 Ω 一般较大。

5.2.2 不变最小对偶分布的存在性和光滑性

定理 5.6 设 Ω 是定义在 U 上的一个光滑对偶分布, τ_1, \dots, τ_q 是定义在 U 上的光滑向量场,则在包含 Ω 并在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的对偶分布族全族中,必存在一个不但最小而且光滑的对偶分布。

证明 所讨论对偶分布族显然是非空的。如 Ω_1 和 Ω_2 是此族中的二元素,则其交 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 包含 Ω 和在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,也是此族中一对偶分布。这表明,族中所有分布的交 $\hat{\Omega}$ 包含 Ω 并在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,并被包含在族中任意其它对偶分布中, $\hat{\Omega}$ 就是族中的最小元素。

下面证明不变最小对偶分布是光滑的。如果 $\hat{\Omega}$ 不光滑,则 $\hat{\Omega}$ 为所求最小而且光滑的分布。如果 $\hat{\Omega}$ 不光滑,则转而使用式(4-6)的不变性定义(定义 4.6)为

$$L_{\tau_i} \text{smt}(\hat{\Omega}) \subset \hat{\Omega} \quad (5-10a)$$

$$L_{\tau_i} \text{smt}(\hat{\Omega}) \subset \text{smt}(\hat{\Omega}) \quad (5-10b)$$

$$\omega \in \text{smt}(\hat{\Omega}) \Rightarrow L_{\tau_i} \omega \in \text{smt}(\hat{\Omega}) \quad (5-10c)$$

这里 $\text{smt}(\hat{\Omega}) \subset \hat{\Omega}$ 光滑。由假设知 Ω 光滑,故 $\text{smt}(\hat{\Omega})$ 包含 Ω ; 因为 $\text{smt}(\hat{\Omega}) \subset \hat{\Omega}$, 而 $L_{\tau_i} \hat{\Omega} \subset \hat{\Omega}$, 知 $\text{smt}(\hat{\Omega})$ 满足式(5-10a), 即 $\text{smt}(\hat{\Omega})$ 在 τ_1, \dots, τ_q 下不变, 所以 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle = \text{smt}(\hat{\Omega})$ 。结论: 不变最小对偶分布存在且光滑。

5.2.3 不变最小对偶分布的生成

5.2.3.1 不变最小对偶分布的生成序列

不变最小对偶分布可用构造法生成。下面介绍构造方法。给定条件是已知定义在 U 上的一个光滑对偶分布 Ω 和定义在 U 上的一个光滑向量场集合 τ_1, \dots, τ_q 。

依据不变最小对偶分布的定义,设计了如下的不减递推序列,称为不变最小对偶分布的生成序列

$$\Omega_0 = \Omega \quad (5-11a)$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \sum_{i=1}^q L_{\tau_i} \Omega_{k-1} \quad (5-11b)$$

此生成序列所构造的不变最小对偶分布保证了包含 Ω 和在 τ_1, \dots, τ_q 下不变,也保证了最小,并且可保证以有限次递推得到 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 的结果。计算时 $k=0$ 也是可能的,比如说,出发时 $\Omega_0 = \Omega = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 的情况。应当注意的是,生成算法不要求对偶分布和向量场非奇异,算法对含奇异点的情况也适用。

5.2.3.2 不变最小对偶分布生成序列的递推终止条件

定理 5.7 式 5.11 的算法生成的分布 Ω_k 对所有 k 满足

$$\Omega_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$$

并且,当有一整数 k^* 使 $\Omega_{k^*} = \Omega_{k^*+1}$ 被满足时,计算终止,将得到结果

$$\Omega_k^* = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle \quad (5-12)$$

证明 设 Ω' 是包含 Ω 且在向量场 τ_1, \dots, τ_q 下不变的任一对偶分布。首先证明, 如果 $\Omega' \supset \Omega_k$, 则 $\Omega' \supset \Omega_{k+1}$ 。按生成序列, 并注意到定义 4.4, 得

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1} &= \Omega_k + \sum_{i=1}^q L_{\tau_i} \Omega_k = \Omega_k + \sum_{i=1}^q \text{span}\{L_{\tau_i} \omega : \omega \in \Omega_k\} \\ &\subset \Omega_k + \sum_{i=1}^q \text{span}\{L_{\tau_i} : \omega \in \Omega'\} \subset \Omega' \end{aligned}$$

其次, 证明 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle \supset \Omega_k$ 。因为 $\Omega' \supset \Omega_k$, 由 $\Omega_0 = \Omega \subset \Omega'$ 出发, 不停引用上面的结果, 可知对所有 k 有 $\Omega' \supset \Omega_k$ 。因为 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 符合 Ω' 条件, 可充作 Ω' , 所以 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \supset \Omega_k \rangle$ 。定理前半得证。

设对某个 k^* 有 $\Omega_{k^*} = \Omega_{k^*+1}$ 。按生成序列, $\Omega_{k^*} \supset \Omega$ 。因为

$$[\tau_i, \Omega_{k^*}] \subset \Omega_{k^*+1} = \Omega_{k^*} \quad 1 \leq i \leq q$$

所以 Ω_{k^*} 是在 τ_1, \dots, τ_q 下不变的。从构造过程又知 Ω_{k^*} 是最小的。因此, Ω_{k^*} 必与 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 重合。定理证毕。

例 5.2 (线性系统的不变最小对偶分布) 单输入、单输出 n 阶线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

求不变最小对偶分布 $\langle Ax, B | \text{span}\{C\} \rangle$ 。取 $\Delta = \text{span}\{C\}$, $\tau_1 = Ax$, $\tau_2 = B$, 按生成序列, 有

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega = \text{span}\{C\} \\ \Omega_1 &= \Omega_0 + L_{\tau_1} \Omega_0 + L_{\tau_2} \Omega_0 = \text{span}\{C\} + \text{span}\{L_{Ax}C\} + \text{span}\{L_B C\} \\ &= \text{span}\{C\} + \text{span}\{CA\} = \text{span}\{C, CA\} \\ \Omega_2 &= \Omega_1 + L_{\tau_1} \Omega_1 + L_{\tau_2} \Omega_1 \\ &= \text{span}\{C, CA\} + \text{span}\{L_{Ax}C, L_{Ax}CA\} + \text{span}\{L_B C, L_B CA\} \\ &= \text{span}\{C, CA\} + \text{span}\{CA^2\} = \text{span}\{C, CA, CA^2\} \\ &\vdots \\ \Omega_{n-1} &= \Omega_{n-2} + L_{\tau_1} \Omega_{n-2} + L_{\tau_2} \Omega_{n-2} = \text{span}\{C, CA, \dots, CA^{n-1}\} \\ \Omega_n &= \Omega_{n-1} \end{aligned}$$

最后得不变最小对偶分布

$$\langle Ax, B | \text{span}\{C\} \rangle = \langle Ax | \text{span}\{C\} \rangle = \Omega_{n-1} = \text{span}\{C, CA, \dots, CA^{n-1}\} \quad (5-13)$$

从分布观点看, 如果在点 x 把对偶向量场 C, CA, \dots, CA^{n-1} 中的每一个都视为一个坐标系的坐标轴方向, 则他们一起构成了点 x 的一个对偶空间

$$\langle Ax, B | \text{span}\{C\} \rangle = \text{span}\{C, CA, \dots, CA^{n-1}\}$$

当 $\text{rank}[C^T : A^T C^T : \dots : (A^{n-1})^T C^T] \neq n$ 时, 此对偶空间是点 x 全 n 维对偶空间的一个子空间。此子空间就是点 x 处能影响输出 y 的对偶向量方向的可能散布范围, 并称为不变最小对偶分布。在不属于不变最小对偶分布范围的对偶向量方向上, 点 x 不影响输出 y , 得到零输出。

从映射观点看, 如果把 $[C^T : A^T C^T : \dots : (A^{n-1})^T C^T]$ 视为一可能不满秩的变换矩阵, 把输出 y 分为两部分 $y = 0$ 部分和 $y \neq 0$ 部分, 则 $y \neq 0$ 部分的 $[C^T : A^T C^T : \dots :$

$(A^{n-1})^T C^T]$ 变换原像就是影响输出的系统状态的可能活动空间。此空间包含不满秩阵 $[C]$ 变换的原像,包含经可能不满秩的变换 A 阵做有限次重复变换的原像,并且是最小的,被称为能观不变子空间。 $y=0$ 部分的 $[C^T : A^T C^T : \cdots : (A^{n-1})^T C^T]$ 变换原像 $\ker[C^T : A^T C^T : \cdots : (A^{n-1})^T C^T]$ 则是不影响输出的系统状态的可能活动空间。

相应地, Ω_{n-1}^\perp 是在向量场 Ax 下不变,并被包含在分布 Ω_0^\perp 中的最大分布。由生成过程知,在每点 $x \in R^n$ 有以下关系

$$\Omega_0^\perp(x) = \ker(C)$$

$$\Omega_{n-1}^\perp = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k)$$

5.2.4 不变最小对偶分布的非奇异性

如果定义在 U 上的不变最小对偶分布 $\langle \tau_1, \cdots, \tau_q | \Omega \rangle$ 有奇异点,则使其具有非奇异性的方法是,把 U 中奇异部分剔除,通过限制和减小 U 域得到非奇异的不变最小对偶分布 $\langle \tau_1, \cdots, \tau_q | \Omega \rangle$ 。设 U_k 是对偶分布 Ω_k 的正则点的集合,根据对偶分布正则点性质 1 知, U_k 是 U 上的一个开稠集。取

$$U^* = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1} \quad (5-14)$$

则 U^* 也是 U 上的一个开稠集。在每点 $x \in U^*$ 的邻域,对偶分布 $\Omega_0, \cdots, \Omega_{n-1}$ 是非奇异的。

5.2.5 不变最小对偶分布的对合性

5.2.5.1 Ω_k 基底和 Ω_{k-1} 基底间的关系

引理 5.8 在最小不变对偶分布生成序列式(5-11)中,设分布 Ω_{k-1} 非奇异,并且 $\Omega_{k-1} = \text{span}\{\omega_1, \cdots, \omega_{n-d}\}$, 则 Ω_k 可表示为

$$\Omega_k = \text{span}\{\omega_s, L_{\tau_i} \omega_s : 1 \leq s \leq n-d, 1 \leq i \leq q\} \quad (5-15)$$

事实上,按式(5-11),有

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \Omega_{k-1} + \sum_{i=1}^q L_{\tau_i} \Omega_{k-1} = \text{span}\{\omega_1, \cdots, \omega_{n-d}, L_{\tau_i} \omega_1, \cdots, L_{\tau_i} \omega_{n-d}, 1 \leq i \leq q\} \\ &= \text{span}\{\omega_s, L_{\tau_i} \omega_s : 1 \leq s \leq n-d, 1 \leq i \leq q\} \end{aligned}$$

5.2.5.2 张成 $\langle \tau_1, \cdots, \tau_q | \Omega \rangle$ 的基底 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-d}$ 与 τ_1, \cdots, τ_q 的关系

引理 5.9 设 Ω 由定义在 U 上的对偶向量场 $d\lambda_1, \cdots, d\lambda_s$ 张成, λ_i 是集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ 中一个函数,则存在 U 的一个开稠子流形 U^* , 对每个 $x^0 \in U^*$, 存在 x^0 的一个邻域 U^0 和 $\dim(\langle \tau_1, \cdots, \tau_q | \Omega \rangle)(x^0) = n-d$ 个对偶向量场 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-d}$, 对所有 $x \in U^0$ 满足

$$\langle \tau_1, \cdots, \tau_q | \Omega \rangle(x) = \text{span}\{\omega_1(x), \cdots, \omega_{n-d}(x)\} \quad (5-16)$$

而且 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-d}$ 有以下形式

$$\omega_i = dL_{v_r} L_{v_{r-1}} \cdots L_{v_1} \lambda_i \quad (5-17)$$

这里 $r \leq n-1$ 是一个(可能与 i 有关的)整数; v_0, \cdots, v_r 是集合 $\{\tau_1, \cdots, \tau_q\}$ 中的向量场, 即

在开稠子流形 U^* 中每点 x 的邻域, $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 由全微分对偶向量场张成。

证明 (用数学归纳法) 首先, 用如非奇异性一节的方法确定 U^* 。设 U_k 是分布 Ω_k 的正则点的集合, 取

$$U^* = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$$

在每点 $x \in U^*$ 的邻域, 分布 $\Omega_0, \dots, \Omega_{n-1}$ 是非奇异的。

其次, 确定 Ω_k 的维数和基底。记 Ω_k 的维数为 d_k , d_k 可能与 x 有关。如果 x 是 U^* 的一个点, 则 d_k 在 x 附近是常数。由假设, 在 x 附近, Ω_0 由 $\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_s\}$ 中的 d_0 个对偶向量场张成。根据生成序列, 在 x 附近, Ω_k 由 d_k 个如下形式的全微分对偶向量场张成

$$\omega_i = dL_{v_r} L_{v_{r-1}} \dots L_{v_1} \lambda_i \quad 1 \leq i \leq d_k \quad r \leq k$$

式中, v_0, \dots, v_r 是 $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ 中的向量场; r 可能与 i 有关。 Ω_k 中任意对偶向量场 ω 在 x 附近可表示为

$$\omega = c_1 \omega_1 + \dots + c_{d_k} \omega_{d_k}$$

式中, c_1, \dots, c_{d_k} 是定义在 x 附近的实值光滑函数。

最后, 在此基础上推导 Ω_{k+1} 的基底对偶向量场的形式, 证明 Ω_{k+1} 也是由类似形式的全微分对偶向量场张成。

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k + \sum_{j=1}^q L_{\tau_j} \Omega_k$$

式中, $\omega \in \Omega_k$ 是在 τ_j 方向的李导数, 注意到公式(2-37), 计算结果为

$$\begin{aligned} L_{\tau_j} \tau &= L_{\tau_j} (c_1 \omega_1 + \dots + c_{d_k} \omega_{d_k}) \\ &= c_1 L_{\tau_j} \omega_1 + \dots + c_{d_k} L_{\tau_j} \omega_{d_k} + (L_{\tau_j} c_1) \omega_1 + \dots + (L_{\tau_j} c_{d_k}) \omega_{d_k} \end{aligned}$$

得

$$\Omega_{k+1} = \text{span} \{ \omega_i, L_{\tau_1} \omega_i, \dots, L_{\tau_q} \omega_i : 1 \leq i \leq d_k \}$$

因为 Ω_{k+1} 在 x^0 附近非奇异, 可找到 d_{k+1} 个以下形式的向量场

$$\omega_i = dL_{v_r} L_{v_{r-1}} \dots L_{v_1} \lambda_i \quad 1 \leq i \leq d_{k+1} \quad r \leq k+1$$

张成 Ω_{k+1} 。

5.2.5.3 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 非奇异则 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ 是对合的

定理 5.10 设 Ω 由定义在 U 上的全微分对偶向量场 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_s$ 张成, λ_i 是集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ 中一个函数, 并且 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 在 U^* 上非奇异, 则 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ 在 U^* 上是对合的。

证明 如果 θ_1, θ_2 是 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ 中任意二对偶向量场, 那么我们只需证明它们的李括号 $[\theta_1, \theta_2]$, 对所有 $x \in U^*$, 满足 $[\theta_1, \theta_2](x) \in \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp(x)$ 。首先, 由引理 5.9 的结论知, 在开稠子流形 U^* 中每点 x 的邻域上, $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 由式(5-17)形式的全微分对偶向量场张成。其次, 按可积性定义, $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ 对应的正交分布 $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$, 是可积的。由 Frobenius 定理, 对每点 $x \in U^*$, $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ 是对合的。定理得证。

第 6 章 非线性系统的能控能观性和坐标变换

非线性系统几何理论建立在状态空间分析方法的基础上。本章 6.1 节给出了非线性系统的一般状态空间表示。随后给出了作为非线性系统几何理论主要研究对象,也是本书主要研究对象的仿射型非线性系统的一般状态空间表示。在此基础上,随后两节转入状态空间分析方法两大基本问题——非线性系统能控性和能观性问题的讨论。对能控性,首先定义了全局可达点和全局能控性,以后定义了要求更高、更有实际意义的局部能控性,最后对线性系统能控性和非线性系统能控性进行了对比。对能观性,首先定义了全局不可区分点和全局能观性,以后定义了要求更高、更有实际意义的局部能观性,最后对线性系统能观性和非线性系统能观性作了对比。本章最后一节在一般意义上讨论了非线性系统的坐标变换,建立了全局微分同胚概念和局部微分同胚概念。给出了向量场和对偶向量场坐标变换的一般公式。该节最后论述了分布和对偶分布的几个重要性质——对合分布在坐标变换后仍是对合分布,不变分布在坐标变换后仍是不变分布,不变对偶分布在坐标变换后仍是不变对偶分布。

6.1 非线性系统的状态空间描述

6.1.1 系统的状态空间描述

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础之上的。动力学系统的状态定义为完全地表征系统时间域行为的一个最小内部变量组。组成这个变量组的变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 称为系统的状态变量,其中 $t \geq t^0$, t^0 为初始时刻。由状态变量构成的列向量

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad t \geq t_0 \quad (6-1)$$

称为系统的状态向量,简称为状态。状态空间则定义为状态向量取值的一个向量空间。因为状态变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 只能取实数值,所以状态空间是建立在实数域上的向量空间,其维数为 n 。对于确定的某个时刻,状态表示为状态空间的一个点,而状态随时间的变化过程,则构成了状态空间的一条轨迹。

在状态和状态空间的基础上,可建立动力学系统的状态空间描述。系统输入引起状态的变化是一个动态过程。对连续系统而言,数学上可用微分方程来表示,并称它为状态方程。一般情况下,状态方程是一个一阶非线性时变微分方程组。写成向量方程形式为

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad t \geq t^0 \quad (6-2)$$

式中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}$$

状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程,描述这种转换过程的数学表达式是系统的输出方程或量测方程。对于连续动力学系统,一般情况下,输出方程形式为

$$y = h(x, u, t) \quad (6-3)$$

式中

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad h(x, u, t) = \begin{bmatrix} h_1(x, u, t) \\ \vdots \\ h_p(x, u, t) \end{bmatrix}$$

系统的状态空间描述由状态方程和输出方程两部分组成。

如果在状态空间描述

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (6-4)$$

中,向量函数 $f(x, u, t), g(x, u, t)$ 至少包含有一个分量是变量 x_1, \dots, x_n 和 u_1, \dots, u_m 的非线性函数,则称该系统为非线性系统。严格地说,一切实际的系统都是非线性的,线性系统只是实际系统在忽略某些次要的非线性因素后的一类理想化的模型。要更准确地刻画和表达实际系统,必须如实地视系统为非线性系统,建立相应的非线性模型。

6.1.2 仿射型非线性系统

本书将重点地研究一类时不变非线性系统,称为仿射型非线性系统(affine nonlinear system)。其特点是状态方程右端与输入向量 u 呈线性关系,而且输出方程右端与输入向量 u 无关。其数学表达式是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (6-5)$$

或写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_i &= h_i(x) \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (6-6)$$

式中,状态变量 $x \in U \subset R^n$, U 是流形 $N = R^n$ 上一开集;向量函数 $f, g_1, \dots, g_m \in R^n$, 定义在 U 上;输入向量函数 $u \in J$, J 是允许控制集,通常取为 m 维的 Lebesgue 可积函数组成的线性空间;输出向量函数 $h(x) \in Y$, Y 是 p 维的实值函数组成的线性空间。写成向量展开形式则为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix} \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(x) \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

同时假设 $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p$ 光滑,即其任意阶导数连续。

有些非线性系统,在形式上不是仿射型的,但可以经过一定变换,变成仿射型的系统。比如说,凡属于下面形式的状态方程,经过变换都可以变换为仿射型状态方程。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)w(u + \psi(x)) \quad (6-8)$$

式中, w 的逆映射存在。对此方程,如令

$$v = w(u + \psi(x))$$

可使式(6-8)取式(6-5)的形式。一旦求出 v , 可通过下式最终得到应施加的控制

$$u = w^{-1}(v) - \psi(x)$$

6.2 非线性系统的能控性

6.2.1 系统的能控性和局部能控性

6.2.1.1 能控性的定义

系统能控性用于刻画系统输入 u 驾驭系统状态 x 的能力。

非线性系统的能控性比线性系统能控性涉及更多的问题,定义起来要更困难和更复杂。从根本上说,这是因为线性系统状态阵 A 和控制阵(或向量) B 是常阵(或常向量),而对非线性系统,如果也写成矩阵与向量相乘的形式,则其相应的状态阵 A 和控制阵(或向量) B 将是状态的函数。这一差别使状态能控性与空间点所在位置有密切关系,将会随空间点位置不同而不同,表现出空间上很大的不一致性。一般地说,将不再像线性系统那样,能很容易地由一个局部的能控性推断另一部分或全局的能控性,甚至由 A 点到 B 点和由 B 点到 A 点的能控性都可能不同。根据上述情况,下面在能达和能控两个层次上来定义非线性系统的能控性。

考虑非线性系统式(6-4),设状态空间是一个 n 维连通 C^∞ 流形,容许控制 $u(t)$ 是有界函数。假设系统的解存在。

定义 6.1 对系统式(6-4),设 $x^0 \in M \subset R^n$, M 为全状态空间。如果存在时刻 T 和 $u(t) \in J, 0 \leq t \leq T$, J 是容许控制集,在 $u(t)$ 作用下,系统状态轨线 $x(t)$ 满足 $x(0) = x^0$, $x(T) = x^T \in M$, 并且满足

$$x(t) \in M \quad 0 < t < T$$

则称 x^T 是从 x^0 出发的(全状态)可达点(all state reachable point), 否则称 x^T 是从 x^0 出发的部分状态可达点(partial state reachable point) 或从 x^0 出发的(全状态)不可达点(unreachable point)。 x^0 的全状态可达点的集合称为 x^0 的(全状态)可达点集(reachable point set), 记为 $R(x^0)$ 。

定义 6.1 定义的(全状态)可达点有以下几个性质。

性质 1 传递性。如果 $x^0 \rightarrow x^1$ 可达, $x^1 \rightarrow x^2$ 可达, 则 $x^0 \rightarrow x^2$ 可达。

性质 2 自反性。如果 $x^0 \rightarrow x^1$ 可达, $x^1 \rightarrow x^0$ 可达, 则 $x^0 \rightarrow x^0$ 可达。

性质 3 不具对称性。 $x^1 \rightarrow x^2$ 可达, 并不意味着 $x^2 \rightarrow x^1$ 可达。或说 $x^2 \in R(x^1)$, 但未必 $x^1 \in R(x^2)$ 。

对于从 x^0 出发的部分状态可达点来说, 其状态分为可达状态(reachable states)和不可达状态(unreachable states)。从 x^0 出发的(全状态)不可达点的所有状态都是不可达状态。

状态 x_1, \dots, x_p ($p < n$) 的可达点的集合称为从 x^0 出发的部分状态可达点集 (partial state reachable point set)。

在定义 6.1 基础上进一步定义能控性。

定义 6.2 对系统式(6-4), 如果一点 $x^0 \in M$ 的全状态可达点集为全状态空间 M , 即 $R(x^0) = M$, 则称点 x^0 (全状态) 能控 (all state controllabe point), 否则称点 x^0 部分状态能控 (partial state controllabe point) 或 (全状态) 不能控 (uncontrollable point)。全状态能控点就是全状态空间任何一点都是其全状态可达点。如果系统在 M 的每一点均全状态能控, 则称系统是 (全状态) 能控的 (all system all state controllabe)。

全状态能达和全状态能控的关系可以概括为: 能全状态到达所有点时称点 (全状态) 能控; 所有点都 (全状态) 能控时称系统 (全状态) 能控。系统 (全状态) 能控等于点点全状态能达, 点全状态能控是单向全状态能达。

部分状态能控点只有一部分状态能达到全状态空间 M 的对应状态子空间, 这部分状态被称为能控状态 (controllabe states), 其余状态被称为不能控状态 (uncontrollable states)。(全状态) 不能控点的所有状态都是不能控状态。

定义 6.1 和定义 6.2 是比较宽泛和粗疏的。首先, 它虽然要求到达的时间有限, 但不问到达的路径和到达时间 T 的大小。 x^0 点能控, 但从 x^0 到 x^T 可能要绕很大的弯子和经历很长的时间, 对此, 定义 6.1 和定义 6.2 是不过问的。因此, 有必要限制路径范围和通过限制路径范围而间接地限制时间, 当然, 在客观上, 这也限制了可能施加的控制。其次, 定义 6.1 和定义 6.2 是就全状态空间 M 定义的。实际上, 非线性系统的很多性质都是局部的, 而且反馈控制的构造也往往是局部的。一个从局部着眼的, 同时也适用于全状态空间的能控性定义, 应当更具实用性。基于上述考虑, 给出下面的有别于定义 6.2 的局部能控性定义。

6.2.1.2 局部能控性的定义

定义 6.3 设 U 是 x^0 的一个邻域。如果存在一个容许控制 $u(t)$ 和时间 T , 使运动轨迹满足 $x(0) = x^0, x(T) = x^T$, 并且

$$x(t) \in U \quad 0 < t < T$$

则称 x^T 是 x^0 的 U -可达点。 x^0 的 U -可达点集合称 x^0 的 U -可达集, 记作 $R_U(x^0)$ 。

定义 6.4 对系统式(6-4), 设点 $x^0 \in M$ 。如果 x^0 在 M 内任一邻域 U 上, 其 U -可达点集 $R_U(x^0)$ 仍然等于 U , 即 $R_U(x^0) = U$, 则称系统在 x^0 点 (全状态) 局部能控 (all state local controllabe)。如果在每一点 $x \in M$ 都 (全状态) 局部能控, 则称系统 (全状态) 局部能控 (all system all state local controllabe)。

按上述定义, 点的局部能控性的要求要高于点的能控性。点是 (全状态) 能控的不一定是 (全状态) 局部能控的; 反之, 如果点是 (全状态) 局部能控的, 则该点同时也是 (全状态) 能控的。同样, 系统 (全状态) 局部能控性的要求也高于系统 (全状态) 能控性。系统是 (全状态) 能控的不一定是系统 (全状态) 局部能控的; 反之, 如果系统是 (全状态) 局部能控的, 则系统同时也是 (全状态) 能控的。

关于 (全状态) 能控和 (全状态) 局部能控的传递性、自反性和无对称性, 和 (全状态) 可达相对应, 有如下结论。(1) (传递性) 如果能控点 x^A 能达到所有点, 包括点 x^B , 能控点 x^B 能达到所有点, 包括点 x^C , 则点 x^A 一定能受控达到点 x^C 。(2) (自反性) 如果能控点 x^A 能达到所有点, 包括点 x^B , 能控点 x^B 能达到所有点, 包括点 x^A , 则点 x^A 一定能受控达到点自

身 x^A 。(3)(无对称性)如果能控点 x^A 能达到所有点,包括点 x^B ,但因为点 x^B 不一定能控,所以点 x^B 不一定能受控达到点 x^A 。

6.2.1.3 弱能控性的定义

如上述,能控性和局部能控性有传递性和自反性,但不具对称性。具有以上三个性质的关系称等价关系。能控性和局部能控性不具对称性给深入分析带来不便。为克服此困难,可引入另一种能控性——弱能控性,放宽到只要求至少有一条路径可达,同时要求逆向也可达。

定义 6.5 对全状态空间 M 中两点 x^0, x^T ,如果存在一个容许控制 $u(t)$ 和时间 T , $x(0)=x^0, x(T)=x^T$,存在轨迹点列 $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k=x^T \in M$ 满足关系

$$x^i \in R(x^{i-1}) \text{ 和 } x^{i-1} \in R(x^i) \quad i=1, \dots, k$$

则称 x^T 是 x^0 的弱可达点(weak reachable point)。 x^0 的弱可达点的集合记为 $WR(x^0)$ 。

由定义可知,弱可达点不仅具有传递性、自反性,而且具有对称性。所谓对称性,即如果 $x^1 \in WR(x^2)$,则 $x^2 \in WR(x^1)$ 。

定义 6.6 如果一点 $x^0 \in M$ 的弱能达集为全空间 M ,即 $WR(x^0)=M$,则称 x^0 是弱能控点(weak controllable point)。如果系统在全空间 M 的每一点均弱能控,则称系统是弱能控的(all system weak controllabe)。

定义 6.7 设 U 是 x^0 的一个邻域。如果存在一个容许控制 $u(t)$ 和时间 T ,使 $x(0)=x^0, x(T)=x^T$ 和存在轨迹点列 $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k=x^T \in U$,满足关系

$$x^i \in R_U(x^{i-1}) \text{ 和 } x^{i-1} \in R_U(x^i) \quad (i=1, \dots, k)$$

则称 x^T 是 x^0 的 U -弱可达点(U -weak reachable point)。 x^0 的 U -弱可达点集合记作 $WR_U(x^0)$ 。

定义 6.8 对系统式(6-4),设点 $x^0 \in M$ 。如果 x^0 在 M 内任一邻域 U 上,其弱可达集都等于 U ,即 $WR_U(x^0)=U$,则称 x^0 点是(全状态)弱局部能控的(all state weak local controllabe)。如果在每一点 $x \in M$ 都(全状态)弱局部能控,则称系统是(全状态)弱局部能控的(all system all state weak local controllabe)。

由定义,如果系统是(全状态)局部弱能控的,则系统也是(全状态)弱能控的。如果系统是(全状态)局部能控的,则系统同时也是(全状态)局部弱能控的。如果系统是(全状态)能控的,则系统同时也是(全状态)弱能控的。或写成:

(全状态)局部能控 \Rightarrow (全状态)能控 \Rightarrow (全状态)弱能控;

(全状态)局部能控 \Rightarrow (全状态)局部弱能控 \Rightarrow (全状态)弱能控。

6.2.1.4 线性系统和非线性系统能控性的比较

作为式(6-4)的特例,线性定常系统状态方程可一般地表示为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6-9)$$

式中, $x \in R^n$ 。线性系统能控性具有如下性质。

性质 1 能控和能达的等价性。只要有一个点 $x^1 \in M$ 是 x^0 的全状态可达点,则所有点 $x \in M$ 都是点 x^0 的全状态可达点,所以 x^0 点同时也是全状态能控点。

性质 2 (全状态)可达点不仅具有传递性、自反性,同时具有对称性。所谓对称性,即如果 $x^1 \rightarrow x^2$ 可达,则 $x^2 \rightarrow x^1$ 也可达。

性质 3 点能控和系统能控的等价性。如果某点 x^0 全状态能控,则所有点 $x \in M$ 全状态能控,所以同时也是系统全状态能控的。

性质 4 能控和局部能控的等价性。其中包括点能控和点局部能控等价,系统能控和系统局部能控等价。再由性质 3 可知,这四个性质——点能控、点局部能控、系统能控和系统局部能控,彼此完全等价。

性质 5 点弱能控和系统弱能控的等价性。

性质 6 弱能控和弱局部能控的等价性。其中包括点弱能控和点局部弱能控等价,系统弱能控和系统局部弱能控等价。再由性质 5 可知,这四个性质——点弱能控、点局部弱能控、系统弱能控和系统局部弱能控,彼此完全等价。

性质 7 点能控和点弱能控的等价性。再由性质 4 和性质 6,以上八种能控性完全等价。

一般的非线性系统不具有上列各性质。

在本节最后,要顺便提醒读者,本章定义的能达性、能控性与一般线性系统理论中定义的能达性、能控性并不完全一致。在线性系统理论中,能控性指的是向原点的能控性(或一般地指的是向某一指定点的能控性),能达性是指由原点向任一点的能控性(或一般地指由指定点向所有状态点运动的能控性)。可见,线性系统理论中的能达性与非线性系统理论中的能控性相当。因为非线性系统的很多性质都是局部的,讨论向同一指定点的能控性对于很多区域中的点是没有意义的,而讨论点向其邻域内的点的能控性则对所有点来说都有意义。

6.3 非线性系统的能观测性

6.3.1 系统的能观性和局部能观性

6.3.1.1 能观性的定义

系统能观性用于刻画系统输出 y 观测系统内部状态 x 的能力。

非线性系统的能观性比线性系统能观性涉及更多的问题,定义起来要更困难、更复杂。从根本上说,这是因为线性系统状态阵 A 和观测阵(或向量) C 是常阵(或常向量),而非线性系统,如果也写成矩阵与向量相乘的形式,其相应的状态阵 A 和控制阵(或向量) C 将是状态的函数。这一差别使状态能观性将与空间点所在位置有密切关系,将会随空间点位置不同而不同,表现出空间上很大的不一致性。一般地说,将不再像线性系统那样,能很容易地由一个局部的能观性推断出另一部分或全局的能观性。根据上述情况,下面在不可区分和能观两个层次上来定义非线性系统的能观性。

考虑非线性系统式(6-4),设状态空间是一个 n 维连通 C^∞ 流形,容许控制 $u(t)$ 是有界函数。假设系统的解存在。

定义 6.9 对系统(6-4),某两点 $x^1, x^2 \in M \subset R^n$, M 为全状态空间。如果对任何控制输入 $u(t) \in J$, J 是允许控制集,系统分别取初值 $x(0) = x^1$ 和 $x(0) = x^2$ 时给出的输出 $y^1(t)$ 和 $y^2(t)$ 完全一样,则称 x^1 和 x^2 是(全状态)不可区分的(all state indistinguishable),否则称部分状态可区分的(partial state distinguishable)或(全状态)可区分的(all state distinguishable)。 M 中与给定点 x^0 (全状态)不可区分的所有点的集合称 x^0 的(全状态)不可区分点集(all state indistinguishable point set),记为 $ID(x^0)$ 。

按定义, x^0 与点 x 只要有一个状态分量可区分, 则 x^0 与 x 就不是不可区分的。

对于部分状态可区分点来说, 其状态分为可区分状态(distinguishable states)和不可区分状态(indistinguishable states)。而(全状态)可区分点的所有状态都是可区分状态。状态 x_1, \dots, x_p ($p < n$) 的不可区分点的集合称为部分状态不可区分点集(partial state indistinguishable point set)。

在定义 6.9 基础上进一步定义能观性。

定义 6.10 对系统式(6-4), 如果给定点 $x^0 \in M \subset R^n$ 的全状态不可区分点集只包含其自身, 即 $ID(x^0) = \{x^0\}$, 则称 x^0 点(全状态)能观测(point observable), 否则称 x^0 点部分状态能观测(partial state observable)或(全状态)不能观测(all state inobservable)。如果所有点 $x \in M$ 都能观测, 则称系统是能观测的(all system observable)。

按定义, 点的可区分性与输入 $u(t)$ 有关。在所有输入下, 输出都不可区分才能说两点不可区分, 有一个输入能使输出可区分, 则两点仍属可区分的。一般地说, 在一个控制下可区分, 不等于在其它控制下也可区分。

不可区分和能观的关系可以概括为: x^0 与所有点都可区分时称 x^0 点能观; M 中所有点都能观时称系统能观。系统能观等于点点能相互区分, 一点 x^0 能观只能说明其它点与 x^0 能区分, 不等于其它点能观。

部分状态可区分点只有一部分状态能与全状态空间 M 的对应状态相区分, 这部分状态被称为能观状态(controllable states)。其余状态被称为不能观状态(uncontrollable states)。(全状态)不能观点的所有状态都是不能观状态。

定义 6.9 和定义 6.10 是比较宽泛的, 首先, 容许状态在全状态空间 M 中运动, 未加任何限制。这使得可供选择的控制 $u(t)$ 的范围很宽, 更容易达到可区分。其次, 定义 6.9 和定义 6.10 是就全状态空间 M 定义的。实际上, 非线性系统很多性质都是局部的, 观测器的构造也往往是局部的。一个从局部着眼的, 同时也能用于全状态空间的能观性定义, 应当更具实用性。据此, 给出下面的局部能观性定义。

6.3.1.2 局部能观性的定义

定义 6.11 对系统式(6-4), 某两点 $x^1, x^2 \in U \subset M$, 如果对任一时间 $T > 0$ 和任一在 $[0, T]$ 时间内使状态轨线始终留在 U 内的容许控制 $u(t)$, 相应的输出都一样, 即

$$y(x^1, u(t)) = y(x^2, u(t)) \quad t \in [0, T]$$

则称 x^1, x^2 在 U 内(全状态)局部不可区分(all state local indistinguishable)。 U 中与给定点 x^0 (全状态)局部不可区分的所有点的集合称 x^0 的(全状态)局部不可区分点集(all state local indistinguishable set), 记为 $ID_U(x^0)$ 。

定义 6.12 对系统式(6-4), 如果某点 $x^0 \in M \subset R^n$ 在其任一邻域 U 内的全状态局部不可区分点集只包含 x^0 自身, 即 $ID_U(x^0) = \{x^0\}$, 则称 x^0 点局部能观测(point local observable)。如果所有点 $x \in M$ 都局部能观测, 则称系统是局部能观测的(all system local observable)。

按上述定义, 因为域 M 被限制到 U , 使可供选择的控制 $u(t)$ 间接地受到限制, 点的局部能观性的要求要高于点的能观性。点是(全状态)能观的不一定是(全状态)局部能观的; 反之, 如果点是(全状态)局部能观的, 则该点同时也是(全状态)能观的。同样, 系统(全状态)局部能观性的要求也高于系统(全状态)能观性。系统是(全状态)能观的不一定是系统(全状态)局部能观的; 反之, 如果系统是(全状态)局部能观的, 则该点同时也是系统(全状

态)能观的。

6.3.1.3 局部弱能观性的定义

按定义,局部能观性要求 x^0 点对 M 中 x^0 的任一邻域都要与邻域中的点局部可区分。实际上此要求有可能被放宽,比如放宽到只要求在 M 中 x^0 的一个邻域内做到 x^0 与邻域中的点可区分。这导致引入另一种能观性——局部弱能观性。

定义 6.13 对系统式(6-4),点 $x^0 \in M \subset R^n$ 。如果点 x^0 存在一邻域 U ,在 U 内,对其中任意邻域 V , V 上 x^0 的全状态不可区分点集只包含 x^0 自身,即

$$ID_V(x^0) = \{x^0\} \quad (x^0 \in V \subset U \subset M)$$

则称 x^0 点局部弱能观测(point local observable)。如果所有点 $x \in M$ 都局部弱能观测,则称系统是局部弱能观测的(all system local observable)。

由定义,如果系统是局部能观的,则系统同时也是局部弱能观的。再加上前面已有结论:如果系统是局部能观的,则系统同时也是能观的,可综合写成:

(全状态)局部能观 \Rightarrow (全状态)局部弱能观;

(全状态)局部能观 \Rightarrow (全状态)能观。

6.3.1.4 线性系统和非线性系统能观性的比较

考虑一般的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6-9)$$

$$y = Cx \quad (6-10)$$

式(6-9)的通解为

$$x = e^{A(t-t^0)} x(0) + \int_{t^0}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (6-11)$$

相应地,输出的通解为

$$y = Ce^{A(t-t^0)} x(0) + C \int_{t^0}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (6-12)$$

线性系统能观性具有如下性质。

性质 1 可区分性和能观性与控制无关。如果有一个 $u(t)$ 使 x_1 和 x_2 是可区分的,则任何一个 $u(t) \in J$ 都能使 x_1 和 x_2 可区分。

事实上,由式(6-12),同一初始时刻 t^0 分别由 x^1 和 x^2 两点出发的输出,在时刻 t 之差为

$$y_1 - y_2 = Ce^{A(t-t^0)} (x_1 - x_2)$$

可见可区分与否只与 A, C 有关,而与控制 u 无关。

性质 2 能区分和能观的等价性。只要点 $x^0 \in M$ 与另外一个点是可区分的(即 x^0 是可区分点),则与所有点 $x \in M$ (x^0 自身除外)都是可区分的,所以 x^0 点同时也是能观的。

性质 3 点能观和系统能观的等价性。如果某点 x^0 是能观的,则所有点 $x \in M$ 能观,所以同时也是系统(各状态完全)能观的。

性质 4 能观和局部能观的等价性。其中包括点能观和点局部能观等价,系统能观和系统局部能观等价。再由性质 2,这也就是四个性质——点能观、点局部能观、系统能观和系统局部能观,彼此完全等价。只要任何两点 x_1 和 x_2 是可区分的,则就是系统能观和系统局部能观的。

性质 5 局部能观和局部弱能观的等价性。

性质 6 能观性与能控性有对偶性。

以上是线性系统能观性具有的性质,一般的非线性系统不具有这些性质。下面的例子说明非线性系统的能观性与控制有关。

例 6.1 (非线性系统的能观性与控制有关)非线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

情况 1:输入取 $u(t)=1$,保持不变。这时系统退化为线性系统,容易判断,该系统这时是能观的。

情况 2:输入取 $u(t)=0$,保持不变。这时系统退化为另一个线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$y = x_1$$

解得 $y = x_1^0$, 从而对

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \quad \tilde{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \tilde{x}_2^0 \end{bmatrix}$$

产生同样的输出,系统状态 x 有一个分量是不能观的。由此例可见,非线性系统的能观性与所选择的控制有关。

非线性系统的能观性与能控性之间一般不具有对偶性。比如,非线性系统的能控性不依赖于输出(这与线性系统相同),可是非线性系统的能观性却依赖于输入(这与线性系统不同)。

6.4 非线性系统的坐标变换

6.4.1 全局微分同胚

对于非线性系统来说,研究一般的非线性坐标变换更有意义。非线性坐标变换可以一般地表示为

$$z = \phi(x) \quad (6-13)$$

式中, z 是变换后的新坐标系下的状态变量; $\phi(x)$ 是一个 $R^n \rightarrow R^n$ 的映射。下面给出一个全局变换的定义。

定义 6.14 如映射 $\phi: R^n \rightarrow R^n$

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

满足以下两个条件,则称 $\phi(x)$ 是 R^n 上的一个全局微分同胚(global diffeomorphism):

(1)对 R^n 中所有 x , 逆映射 $x = \phi^{-1}(z)$ 存在, 且

$$\phi^{-1}(\phi(x)) = x \quad (6-14)$$

(2) $\phi(x)$ 和 $\phi^{-1}(z)$ 都是光滑映射, 即 $\phi(x)$ 和 $\phi^{-1}(z)$ 各分量对其各自变量都有任意阶连续偏导数。

定义中的条件(1)保证变换的可逆性, 条件(2)保证变换前的光滑系统在变换后仍然是一个光滑系统。全局微分同胚是一个全局的等价变换, 是一个理想化的变换。

遗憾的是, 在很多问题中全局的等价变换往往难以找到。还有一些情况是, 难以验证找到的变换到底是不是全局变换, 即难以检验是否满足定义 6.8 中的两个条件。根据这种情况, 同时考虑到非线性问题大多具有局域性, 又给出了如下的一种局域坐标变换定义。

6.4.2 局部微分同胚

定义 6.14 设 $U \in R^n$, $V \in R^n$ 是开集, 如映射 $\phi: U \rightarrow V$ 是双射(一对一映射, 且满射), ϕ 和 ϕ^{-1} 都是 C^∞ 映射, 则称 ϕ 是一个局部微分同胚(local diffeomorphism)。

检验局部微分同胚可以使用下面的定理。

定理 6.1 设 $z = \phi(x)$ 是定义在 R^n 某子空间 U 上的一个光滑映射, 设 z 在 $x = x^0$ 点的 Jacobi 阵

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x^T} \right|_{x^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x^0} \quad (6-15)$$

非奇异, 则 $z = \phi(x)$ 在 U 的一个包含 x^0 的适当开子集 U^0 上是一个局部微分同胚。

例 6.2 (局部微分同胚) 考虑以下映射 ϕ , 它在全 R^2 上有定义

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ \sin x_2 \end{bmatrix}$$

按全局微分同胚定义, 因为 $z_2 = \phi_2(x) = \sin x_2 \leq 1$, 当 $x_2 > \pi/2$ 时, 有

$$\phi_2^{-1}(\phi(x)) = \arcsin(\sin x_2) \neq x_2$$

所以映射 ϕ 不具可逆性, 不是一个全局微分同胚。

按局部微分同胚检验定理, 求 z 的 Jacobi 阵得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos x_2 \end{bmatrix}$$

在 $x^0 = (0, 0)$ 点, 秩为 2。在子集 $U^0 = \{(x_1, x_2) : |x_2| < \pi/2\}$ 上, 映射 ϕ 是一个局部微分同胚。当范围更大时, Jacobi 阵奇异, 不满足双射条件, 不再是一个局部微分同胚。

6.4.3 非线性系统的非线性坐标变换

6.4.3.1 向量场和对偶向量场的一般坐标变换公式

考虑式(6-6)的一般仿射型非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (6-16)$$

$$y_i = h_i(x) \quad i = 1, \cdots, p$$

要求作非线性变换 $z = \phi(x)$ 。这里 $\phi(x)$ 可能是一个全局坐标变换, 也可能是一个局部坐

标变换。为求得变换后系统的状态方程,使 $z = \phi(x)$ 两端对 t 求导得

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \left[f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t)) u_i(t) \right] \\ &= \bar{f}(z(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(z(t)) u_i(t)\end{aligned}\quad (6-17)$$

$$y_i(t) = \bar{h}_i(z(t)) \quad i=1, \dots, p \quad (6-18)$$

式中

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (6-19)$$

$$\bar{g}_i(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_i(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (6-20)$$

$$\bar{h}_i(z) = [h_i(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (6-21)$$

按式(6-19)的结果,向量场坐标变换的一般公式是

$$\bar{\tau}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \tau(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (6-22)$$

下面推导与向量场坐标变换公式相对应的正交对偶向量场坐标变换一般公式。

设 $\tau(x)$ 是 Δ 中的向量场, $\omega(x)$ 是 Δ^\perp 中的正交对偶向量场。因变换前正交, $\omega(x)\tau(x)=0$ 。两端做变换得

$$[\omega(x)\tau(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} = 0$$

左端可变换为

$$\begin{aligned}\left[\omega(x) \frac{\partial x}{\partial z^T} \frac{\partial z}{\partial x^T} \tau(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} &= \omega(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \left[\frac{\partial z}{\partial x^T} \tau(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \omega(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \bar{\tau}(z)\end{aligned}$$

要求变换后满足正交性不变的条件,即

$$\bar{\omega}(z)\bar{\tau}(z)=0$$

故必有

$$\bar{\omega}(z) = \omega(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \quad (6-23)$$

成立。这就是正交对偶向量场坐标变换的一般公式。

6.4.3.2 对合分布在坐标变换后仍是对合分布

以系统式(6-16)为例,不失一般性,设 $m=1$ 。定义分布

$$\Delta(x) = \text{span}\{f(x), g(x)\}$$

并假设 $\Delta(x)$ 对合,即

$$f(x) \in \Delta(x), g(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [f(x), g(x)] \in \Delta(x)$$

因 $[f(x), g(x)] \in \Delta(x)$, 必可将其表示为基底向量场的线性组合,得

$$[f(x), g(x)] = c_1(x)f(x) + c_2(x)g(x)$$

设向量场 $f(x), g(x)$ 坐标变换后记为 $\bar{f}(z), \bar{g}(z)$, 有

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$\bar{g}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

定义分布 $\bar{\Delta}(z) = \text{span}\{\bar{f}(z), \bar{g}(z)\}$ 。要证明的是

$$\bar{f}(z) \in \bar{\Delta}(z), \bar{g}(z) \in \bar{\Delta}(z) \Rightarrow [\bar{f}(z), \bar{g}(z)] \in \bar{\Delta}(z) \quad (6-24)$$

$[f(x), g(x)]$ 变换后为

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} [f(x), g(x)] \right]_{x=\phi^{-1}(z)} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} (c_1(x)f(x) + c_2(x)g(x)) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= c_1(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{f}(z) + c_2(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{g}(z) \end{aligned} \quad (6-25)$$

另一方面,把 $[\bar{f}(z), \bar{g}(z)]$ 按李括号计算式(2-23)展开

$$\begin{aligned} [\bar{f}(z), \bar{g}(z)] &= \frac{\partial \bar{g}}{\partial z^T} \bar{f}(z) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial z^T} \bar{g}(z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z^T} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right] \right)_{x=\phi^{-1}(z)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial z^T} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right] \right)_{x=\phi^{-1}(z)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \end{aligned}$$

注意到 Jacobi 阵是一个只考虑一阶偏导数而忽略二阶以上偏导数的阵,即

$$\frac{\partial}{\partial z^T} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \approx 0$$

继续推导得

$$\begin{aligned} [\bar{f}(z), \bar{g}(z)] &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &\quad - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial x^T} \frac{\partial x}{\partial z^T} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} \frac{\partial x}{\partial z^T} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x^T} g(x) \right) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} [f(x), g(x)] \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \end{aligned} \quad (6-26)$$

联合式(6-25)得

$$[\bar{f}(z), \bar{g}(z)] = c_1(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{f}(z) + c_2(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{g}(z)$$

这表明 $[\bar{f}(z), \bar{g}(z)] \in \bar{\Delta}(z)$ 。由此得结论:非线性坐标变换后,分布的对合性保持不变。

6.4.3.3 不变分布在坐标变换后仍是不变分布

以系统式(6-16)为例,不失一般性,设 $m=2$ 。定义分布

$$\Delta(x) = \text{span}\{g_1(x), g_2(x)\}$$

并假设 $\Delta(x)$ 在 $f(x)$ 下不变,即

$$g_1(x) \in \Delta(x), g_2(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [f(x), g_1(x)], [f(x), g_2(x)] \in \Delta(x)$$

因 $[f(x), g_i(x)] \in \Delta(x)$, 必可表示为基底向量场 $g_1(x), g_2(x)$ 的线性组合,即

$$[f(x), g_i(x)] = c_{i1}(x)g_1(x) + c_{i2}(x)g_2(x) \quad i=1,2$$

做一般的坐标变换 $z = \phi(x)$, 由式(6-19)和式(6-20), 向量场 $f(x), g_1(x)$ 变换后

为

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad \bar{g}_i(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_i(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad i=1,2$$

$[f(x), g_i(x)]$ 变换后为

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} [f(x), g_i(x)] \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = c_{i1}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{g}_1(z) + c_{i2}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{g}_2(z)$$

引用式(6-26)的结果,有

$$[\bar{f}(z), \bar{g}(z)] = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} [f(x), g(x)] \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

于是得

$$[\bar{f}(z), \bar{g}(z)] = c_{i1}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{g}_1(z) + c_{i2}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{g}_2(z)$$

这表明 $[\bar{f}(z), \bar{g}_i(z)]$ 属于变换后的分布 $\bar{\Delta}(z)$,即

$$[\bar{f}(z), \bar{g}(z)] \in \bar{\Delta}(z) = \text{span}\{\bar{g}_1(z), \bar{g}_2(z)\}$$

由此得出结论:非线性坐标变换后分布的不变性保持不变。

6.4.3.4 不变对偶分布在坐标变换后仍是不变对偶分布^①

以系统式(6-16)为例,不失一般性,设 $m=2$ 。为证明不变分布在坐标变换后仍是不变分布,设分布 $\Delta(x)$ 的对偶分布为

$$\Omega(x) = \text{span}\{\omega_1(x), \omega_2(x)\}$$

并设 $\Omega(x)$ 在向量场 $f(x)$ 下不变,即

$$\omega_1(x) \in \Omega(x), \omega_2(x) \in \Omega(x) \Rightarrow L_f \omega_1(x), L_f \omega_2(x) \in \Omega(x)$$

因对偶分布 $L_f \omega_i(x) \in \Omega(x), i=1,2$,可表示为基底向量场 $\omega_1(x), \omega_2(x)$ 的线性组合,即

$$L_f \omega_i(x) = c_{i1}(x) \omega_1(x) + c_{i2}(x) \omega_2(x) \quad i=1,2$$

设向量场 $f(x)$ 坐标变换后记为 $\bar{f}(z)$,对偶向量场 $\omega_1(x), \omega_2(x)$ 坐标变换后记为 $\bar{\omega}_1(z), \bar{\omega}_2(z)$,即

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad \bar{\omega}_i(z) = \omega_i(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \quad i=1,2$$

定义对偶分布 $\bar{\Omega}(z) = \text{span}\{\bar{\omega}_1(z), \bar{\omega}_2(z)\}$ 。要证明的是

$$\bar{\omega}_1(z) \in \bar{\Omega}(z), \bar{\omega}_2(z) \in \bar{\Omega}(z) \Rightarrow L_{\bar{f}} \bar{\omega}_i(z) \in \bar{\Omega}(z) \quad i=1,2 \quad (6-27)$$

对偶分布 $L_f \omega_i(x), i=1,2$ 坐标变换后为

$$[L_f \omega_i(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} = c_{i1}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{\omega}_1(z) + c_{i2}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{\omega}_2(z) \quad (6-28)$$

另一方面,把 $L_{\bar{f}} \bar{\omega}_i(z), i=1,2$ 按对偶向量场李导数计算式(2-30)展开,注意到Jacobi阵不计二阶以上偏导数,得

$$L_{\bar{f}} \bar{\omega}_i(z) = \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial z^T} \bar{f} \right)^T + \bar{\omega}_i(z) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z^T} = \bar{f}^T(z) \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial z^T} \right) + \bar{\omega}_i(z) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z^T}$$

^① 6.4.3.4节使用的对偶向量场李导数定义与参考文献[1],[2]等文献常见的形式(式(2-30))有所不同,其形式为

$$L_f \omega(p) = (\langle (d\omega^T)^T, f \rangle)^T + \langle \omega, df \rangle = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} f \right)^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x^T} = f^T \frac{\partial \omega^T}{\partial x^T} + \omega \frac{\partial f}{\partial x^T}$$

式(2-30)的现定义存在的问题是,不能保证不变对偶分布在坐标变换后仍是不变对偶分布,不能证明第6章6.4.3.4结果成立。6.4.3.4节列在这里仅供研究时参考。

$$\begin{aligned}
&= \left[f^T(x) \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial}{\partial z^T} \left[\frac{\partial x^T}{\partial z} (\omega_i^T(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&\quad + \left(\omega_i(x) \right|_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \Big) \frac{\partial}{\partial z^T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[f^T(x) \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial x^T}{\partial z} \frac{\partial \omega_i^T}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} + \left[\omega_i(x) \frac{\partial x}{\partial z^T} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[f^T(x) \frac{\partial \omega_i^T}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} + \left[\omega_i(x) \frac{\partial f}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[f^T(x) \frac{\partial \omega_i^T}{\partial z^T} + \omega_i(x) \frac{\partial f}{\partial z^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[f^T(x) \frac{\partial \omega_i^T}{\partial x^T} + \omega_i(x) \frac{\partial f}{\partial x^T} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \\
&= [L_f \omega_i(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T}
\end{aligned} \tag{6-29}$$

联合式(6-28)得

$$L_{\bar{f}} \bar{\omega}_i(z) = c_{i1}(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{\omega}_1(z) + c_{i2}(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \bar{\omega}_2(z)$$

这就证明了 $L_{\bar{f}} \bar{\omega}(z)$ 属于变换后的对偶分布 $\bar{\Omega}(z)$, 即

$$L_{\bar{f}} \bar{\omega}_i(z) \in \bar{\Omega}(z) = \text{span}\{\bar{\omega}_1(z), \bar{\omega}_2(z)\} \tag{6-30}$$

由此得出结论:非线性坐标变换后对偶分布的不变性保持不变。

第 7 章 非线性系统状态方程的可积性

求解非线性微分方程组是非线性系统理论和非线性控制系统要解决的基本问题。本章基于分布和对偶分布概念研究仿射型系统的可积性问题。7.1 节论述了对偶分布法,指出对偶分布法和问题求解的一个合理且可行的途径,以此方法为依据定义了分布可积性。7.2 节讨论分布可积的充要条件——Frobenius 定理。这是一个十分重要,处于核心地位的定理,该小节对此定理做了严格的证明。此定理的重要性不仅体现在定理的结论上,也体现在其整个证明过程中,包括其解决问题的思想、数学方法和一些中间结果上,值得读者认真学习和研究。定理的结果和中间结果在后续各章中有许多重要的应用。

7.1 用分布的零化子研究分布的可积性

7.1.1 概述

前面 2.1 节针对系统式(2-7)表示的状态方程右端为单个向量场的情况,研究了方程求解问题,阐述了积分曲线概念。更一般的情况下,状态方程右端有多个向量场,比如在式(6-5)的右端,就由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 构成了一个组合向量场,而且此组合向量场中的两个向量场的组合关系会随控制的大小而改变。分布的概念就是为表征组合向量场而提出的。

分布一般是由多个向量场张成的。在多个向量场 f_1, \dots, f_d 共同作用下,而且在各向量场间的组合关系时刻在改变的情况下,状态方程的积分曲线是否存在,积分曲线所在解空间如何求得,积分曲线如何求得,与此有关的这些问题就构成了方程可积性或分布可积性问题。

因为向量场有多个,所以直接求多个向量场共同作用下的积分曲线显然是十分困难的。求解这个问题的可行方法是迂回法,或称间接法,具体说就是借助分布的零化子(正交对偶分布) Δ^\perp 来求解的方法。借助于分布的零化子可把多个向量场共同作用下的求解问题转化为各向量场分别单独作用下的求解问题。

7.1.2 Δ^\perp 应满足的基本方程

首先,对状态方程右端分布 Δ 做一个一般的定义。设 Δ 是定义在 R^n 一开集 U 上的一个 d 维非奇异光滑分布,因此在 U 上每点 x^0 的邻域 U^0 上都存在 d 个独立的光滑向量场 $f_1(x), \dots, f_d(x)$, 它们张成分布 Δ , 即

$$\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_d\} \quad (7-1)$$

其次,对分布 Δ 的零化子,即 Δ 的正交对偶分布 Δ^\perp 做一个一般的表述。因为已假定 Δ 非奇异且光滑,根据 3.3.1.2 节正交对偶分布的非奇异性性质 1 和 3.3.1.3 节正交对偶分布的光滑性性质 3,可知 Δ^\perp 在 U^0 上也非奇异且光滑, $n-d$ 维,所以,根据 3.2.3.2 节定理 3.5

的光滑对偶分布正则点的邻域能找到基底向量场的结论,在 x^0 的邻域 U^0 上可找到 $n-d$ 个独立对偶向量场 $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ 张成 Δ^\perp , 即

$$\Delta^\perp(x) = \text{span}\{\omega_1(x), \dots, \omega_{n-d}(x)\} \quad (7-2)$$

在上面工作的基础上,可着手推导 Δ^\perp 应满足的基本方程。由 Δ 和 Δ^\perp 彼此的正交关系, Δ^\perp 应满足的基本方程是

$$\langle \omega_j(x), f_i(x) \rangle = 0 \quad i=1, \dots, d \quad j=1, \dots, n-d \quad (7-3)$$

$$\text{或} \quad \omega_j(x) F_M(x) = 0 \quad j=1, \dots, n-d \quad (7-4)$$

式中, $F_M(x) = [f_1(x) \ \dots \ f_d(x)]$ 是 $n \times d$ 维矩阵。在式(7-4)中, $F_M(x)$ 是已知矩阵, $\omega_j(x)$ 是未知行向量。式(7-4)是关于对偶向量场 $\omega_j(x)$ 的齐次线性方程。因为系数矩阵 $F_M(x)$ 的秩为 d , 所以方程的解空间是 $n-d$ 维的。

7.1.3 定义 $n-d$ 个表示 Δ^\perp 方向和大小光滑函数

光滑对偶向量场 $\omega_j \in \Delta^\perp$ 定义在 x^0 的邻域 U^0 的每一点上。 $\omega_j(x)$ 作为一个光滑向量场,可用一个标量函数(势函数) $\lambda_j(x)$ 的梯度来表达。标量函数 $\lambda_j(x)$ 的梯度为

$$\text{grad} \lambda_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \quad (7-5)$$

注意到 $\omega_j(x)$ 是一个行向量,而式(7-5)中的 $\text{grad} \lambda_j$ 是一个列向量,其表达式应写为

$$\omega_j(x) = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^\top} \quad (7-6)$$

另一方面,注意到函数 $\lambda_j(x)$ 的全微分对偶向量场是

$$d\lambda_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^\top} dx$$

其方向向量与式(7-6)相一致,所以这实际上是要求把 $\omega_j(x)$ 表示为 $\lambda_j(x)$ 的全微分对偶向量场。至此,对未知的 $\omega_j(x)$ 的要求可归结为两个条件:一是 $\omega_j(x) \in \Delta^\perp$, 要求它是 Δ 的正交对偶分布;二是 $\omega_j(x) = d\lambda_j$, 要求它是 Δ 的全微分对偶分布。

基本方程式(7-4)只考虑了第一条要求,为满足第二条要求,只要把式(7-6)代入基本方程,结果得

$$d\lambda_j F_M(x) = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^\top} F_M(x) = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^\top} [f_1(x) \ \dots \ f_d(x)] = 0 \quad j=1, \dots, n-d \quad x \in U \quad (7-7)$$

也就是说

$$\Delta^\perp = \text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\} \quad (7-8)$$

式(7-7)是关于未知的 $\lambda_j(x)$, $j=1, \dots, n-d$ 的偏微分方程组。这里 $\lambda_j(x)$, $j=1, \dots, n-d$ 是为求解状态方程可积性或分布可积性问题而特别定义的 $n-d$ 个光滑函数。解此方程组可求得 $\lambda_j(x)$, $j=1, \dots, n-d$ 。

7.1.4 积分曲线所在的解空间

首先,就 j 为一固定值的情况进行讨论。当由式(7-7)解得 $\lambda_j(x)$ 之后,根据 $\lambda_j(x)$, 按下述方法可确定积分曲线所在的解空间。假设时刻 t 在积分曲线上对应的位置是流形上

的一点 $x(t)$, 函数 λ_j 在该点取值为 $\lambda_j(x)$ 。在该点上, λ_j 变化最陡的方向是梯度方向, 也就是对偶向量场所在方向。变化为零的方向是梯度方向的正交方向, 也就是向量场所在方向。因为积分曲线运动方向必须时刻与向量场的方向和大小保持一致, 所以积分曲线每时每刻只能沿 λ_j 保持常值的方向运动。也就是说, λ_j 保持常值的空间就是积分曲线的解空间。假设积分曲线的出发点是 x^0 , 则其解空间满足方程 $\lambda_j(x) - \lambda_j(x^0) = 0$ 。

在确定解空间过程中, 应注意的是积分曲线是在流形上, 解空间也是在流形上。向量场也好, 对偶向量场也好, 其方向都是指流形上的方向。向量场和对偶向量场的正交关系也发生在流形上, 而不是在函数 $\lambda_j(x)$ 曲面(超曲面)上。

其次, 考虑 $j = 1, \dots, n-d$ 的情况。因 λ_j 有 $n-d$ 个, 积分曲线应处于 $n-d$ 个解空间的交集上。只有在此交集上, 才能同时全面满足式(7-7)方程组中的共 $n-d$ 个方程, 成为符合要求的解。

上述方法的最可贵和最巧妙之处是, 通过对偶变换把多个向量场共同作用下的繁难的求解问题, 化成了一个对偶向量场分别单独作用下的相对简单的求解问题。

例 7.1 (对偶分布法用于求线性系统的解空间) 已知线性定常系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

首先, 考虑只有向量场 $f(x)$ 的情况。由式(7-7), 所找函数 $\lambda(x)$ 应满足

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} f(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

此偏微分方程的解有两个, 分别是

$$\lambda_1 = a \frac{x_1}{x_3} + b \quad \lambda_2 = cx_2x_3 + d$$

设积分曲线的出发点是 x^0 , 与向量场 $f(x)$ 对应的解空间应满足方程 $\lambda_1(x) - \lambda_1(x^0) = 0$ 或 $\lambda_2(x) - \lambda_2(x^0) = 0$ 。把 λ_1, λ_2 代入后得知解空间是

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1^0}{x_3^0} \text{ 和 } x_2x_3 = x_2^0x_3^0$$

前一个是过 x^0 点和 x_2 坐标轴的平面; 后一个是过 x^0 点的的双曲面, 双曲面的母线平行于 x_1 坐标轴。

其次, 考虑只有向量场 $g(x)$ 的情况。所找函数 $\lambda(x)$ 应满足

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} g(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

此偏微分方程的一般解可表示为 $\lambda = S(x_2, x_3)$, 与向量场 $g(x)$ 对应的解空间应满足方程 $\lambda(x) - \lambda(x^0) = 0$ 。代入后得解空间的表达式是

$$S(x_2, x_3) = S(x_2^0, x_3^0)$$

这是过 x^0 点并且其母线平行于 x_1 坐标轴的任意曲面。

同时考虑 $f(x)$ 和 $g(x)$ 时,解空间是前面求得的两组解空间的交集,其结果是

$$x_2 x_3 = x_2^0 x_3^0$$

注意解空间处于三维流形 R^3 中。

3.1.5 分布可积性的定义

定义 7.1 设 Δ 是一个定义在开集 $U \subset R^n$ 上的非奇异 d 维分布。如对每点 $x^0 \in U$ 都存在邻域 U^0 和定义在 U^0 上的 $n-d$ 个光滑函数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$, 使在 U^0 上有

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\} = \Delta^\perp \quad (7-9)$$

则称该非奇异 d 维分布是**完全可积的** (complete integrable)。

值得注意的是,定义分布可积性并未直接对分布加以限定,而是限定其正交对偶分布,要求正交对偶分布由 $n-d$ 个全微分对偶向量场张成。通过限定正交对偶分布间接地对分布加以限定的定义方法,与前面给出的式(7-7)的解法相一致。

由式(7-7)可以看到,对于由矩阵 $F(x)$ 各列张成的分布来说,具有完全可积性就是要求式(7-7)能找到 $n-d$ 个独立解 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ 。 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ 的存在保证了解空间的存在,也保证了积分曲线的存在。

7.2 分布可积的充要条件——Frobenius 定理

7.2.1 Frobenius 定理

在分布可积性研究中,一个最重要的定理就是 Frobenius 定理。它阐明了非线性方程解存在的基本条件。定理的叙述虽然很简单,只有一句话,但其内涵是很丰富的。在该定理证明过程中,将给出很多重要的结果,因此,请读者一定要认真关注该定理的证明过程。

定理 7.1 (Frobenius 定理) 一个非奇异分布完全可积的充要条件是它是对合的。

证明 考虑分布 $\Delta = \{f_1, \dots, f_d\}$, Δ 定义在点 $x^0 \in U \subset R^n$ 的邻域 U^0 上。

首先证明必要性。由假设知,存在函数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ 满足式(7-7)和式(7-8)。式(7-7)可改写为

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} f_i(x) = \langle d\lambda_j(x), f_i(x) \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq d \quad 1 \leq j \leq n-d \quad x \in U^0 \quad (7-10)$$

或

$$\langle d\lambda_j(x), f_i(x) \rangle = L_{f_i} \lambda_j(x) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq d \quad 1 \leq j \leq n-d \quad x \in U^0 \quad (7-11)$$

式(7-11)的结果使我们可以证明下式成立

$$L_{[f_i, f_k]} \lambda_j(x) = L_{f_i} L_{f_k} \lambda_j(x) - L_{f_k} L_{f_i} \lambda_j(x) = 0 \quad \forall 1 \leq i, k \leq d \quad x \in U^0$$

此式对所有 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ 成立,写成向量形式得

$$\begin{bmatrix} L_{[f_i, f_k]} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ L_{[f_i, f_k]} \lambda_{n-d}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda_1(x) \\ \vdots \\ d\lambda_{n-d}(x) \end{bmatrix} [f_i, f_k](x) = 0 \quad \forall 1 \leq i, k \leq d \quad x \in U^0$$

因为由可积假设, $\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\}$ 张成 Δ^\perp , 所以上式表示 $[f_i, f_k] \in \Delta, \forall 1 \leq i, k \leq d$ 。于是分布对合得证。

其次, 证明充分性。问题是如何在分布非奇异、对合条件下, 能找到一组 $n-d$ 个函数满足式(7-8)。因为分布 Δ 非奇异, d 维, 所以 U 上每点 x^0 的邻域 U^0 上存在 d 个光滑向量场 f_1, \dots, f_d 张成 Δ , 即在 U^0 的每点 x 有

$$\Delta = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\} \quad (7-12)$$

设 f_{d+1}, \dots, f_n 是补充的向量场, 也定义在 U^0 上, 在 U^0 的各点 x 上满足

$$\text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x), f_{d+1}(x), \dots, f_n(x)\} = R^n \quad (7-13)$$

假设 $\phi_1^f(x), \dots, \phi_n^f(x)$ 分别是向量场 $f_1(x), \dots, f_n(x)$ 的流。我们将用这些流函数构造出偏微分方程式(7-7)的解。在第二章 2.1.3 节已经说明了单个向量场下的流映射的性质, 主要是, 不同时刻的流截面积间的映射是一个微分同胚, 是一对一的可逆映射; 映射前后都在 x^0 的邻域 U^0 上, 时刻 $t=0$ 的流截面上一点 x^0 , 经映射后得到时刻 t 的流截面 $x = \phi_t^f(x^0)$ 。在此, 应特别提请读者注意的是, 像点位置有两种不同的 t 表示方法。像点位置的第一种表示方法是用 x (x 空间坐标), 第二种表示方法是用 t , 大小不同的 t 可以表示不同的位置。用 t 表示位置时, 常把 t 记为 z 。以 z 作为像点位置的另一种表示, 形成了一个新的坐标系 (z 空间坐标)。

上面是就单个向量场对流映射所作的概念性解释。在有 n 个向量场同时存在的情况下, 必须在不同向量场流映射间进行切换。要使微分同胚关系成立, 必须对某一向量场作流映射的时间加以限制。下面给出严格定义。

定义如下一个映射

$$\begin{aligned} F: U_\epsilon &\rightarrow R^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\rightarrow \phi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \phi_{z_n}^{f_n}(x^0) = F(z) = x \end{aligned} \quad (7-14)$$

式中, $U_\epsilon = \{z \in R^n : |z_i| < \epsilon\}$; 记号 \circ 表示复合函数。式(7-14)所示是一连串的复合函数。

当 ϵ 足够小时, 所定义映射有下列两个性质:

- (1) 映射对所有 $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in U_\epsilon$ 有定义, 且是一个微分同胚。
- (2) 对所有 $z \in U_\epsilon$, Jacobi 阵

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z^T} \right]$$

的前 d 列是分布 $\Delta(F(z))$ 中的 d 个线性独立向量。这里的 $\Delta(F(z))$ 是以 z 坐标表示的分布 Δ , 即 $\Delta(F(z)) = \Delta(x)|_{x=F(z)}$ 。

以上的两个性质, 容稍后加以证明。

研究所定义映射如何构成偏微分方程式(7-7)的解。把映射 F 的像记为 U^0 。因为 $z=0$ 点的像恰好是 x^0 , 所以 U^0 确实是 x^0 的一个开邻域。根据性质(1), 映射是一个微分同胚, 其逆映射 F^{-1} 存在, 而且是定义在 U^0 上的一个光滑映射。设逆映射为

$$z = F^{-1}(x) = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (7-15)$$

式中, ϕ_1, \dots, ϕ_n 是对所有 U^0 中 x 有定义的实函数。

下面要证明 $\phi(x)$ 的后 $n-d$ 个分量就是偏微分方程式(7-7)的解。在下面的证明中,

规定在坐标变换前,分布记为 $\Delta(x)$,对偶分布记为 $\Delta^\perp(x)$;在坐标变换后,分布记为 $\Delta(x(z))$,对偶分布记为 $\Delta^\perp(x(z))$ 。按逆的定义,对所有 $z \in U_\epsilon$ 有

$$\left[\frac{\partial F^{-1}}{\partial x^T} \right]_{x=F(z)} \left[\frac{\partial F}{\partial z^T} \right] = I \quad (7-16)$$

再由性质(2)知, $[\partial F / \partial z^T]$ 的前 d 列在 U^0 的任一点 $x = F(z)$ 上构成了 Δ 的一组基底。因此知

$$\left[\frac{\partial F^{-1}}{\partial x^T} \right]_{x=F(z)}$$

的后 $n-d$ 行乘 $[\partial F / \partial z^T]$ 的前 d 列的乘积必为零,变换到 x 坐标下,即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{d+1}}{\partial x^T} [f_1(x) \cdots f_d(x)] &= 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x^T} [f_1(x) \cdots f_d(x)] &= 0 \end{aligned} \quad (7-17)$$

此式表明 $\partial \phi / \partial x^T$ 的后 $n-d$ 行张成了对偶分布 $\Delta^\perp(x)$,可见 $\phi_{d+1}, \dots, \phi_n$ 就是要找的 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ 。按定义,因为已找到了 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$,所以分布可积得证。

到此为止,为证明充分性所要做的只剩下证明性质(1)和(2)了。让我们继续证明。

证明性质(1)。因为已知向量场 f 的流 $\phi_t^f(x)$ 对所有 $x \in R^n$ 和足够小的 $|t|$ 有定义,所以 F 对所有 $|z_i|$ 足够小的 (z_1, \dots, z_n) 有定义。而且,因为流映射是光滑的,所以 F 光滑。我们想通过证明 F 的 Jacobi 阵在 $z=0$ 点的秩等于 n 来证明 F 是一个微分同胚。

由复合函数求导的链式规则,并注意式(2-8)和求逆公式(2-11),得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z_1} &= \frac{\partial(\phi_{z_1}^1 \circ \cdots \circ \phi_{z_n}^n(x^0))}{\partial z_1} = \frac{\partial(\phi_{z_1}^1 \circ \cdots \circ \phi_{z_n}^n(x^0))}{\partial(\phi_{z_2}^2 \circ \cdots \circ \phi_{z_n}^n(x^0))^T} \frac{\partial(\phi_{z_2}^2 \circ \cdots \circ \phi_{z_n}^n(x^0))}{\partial z_1} \\ &= \frac{\partial \phi_{z_1}^1}{\partial x^T} f_1(\phi_{z_2}^2 \circ \cdots \circ \phi_{z_n}^n(x^0)) = \frac{\partial \phi_{z_1}^1(x)}{\partial x^T} f_1(\phi_{z_1}^1(F(z))) \\ &\dots \\ \frac{\partial F}{\partial z_i} &= \frac{\partial \phi_{z_1}^1}{\partial x^T} \cdots \frac{\partial \phi_{z_i}^i}{\partial x^T} \frac{\partial}{\partial z_i} (\phi_{z_{i+1}}^{i+1} \circ \cdots \circ \phi_{z_n}^n(x^0)) \\ &= \frac{\partial \phi_{z_1}^1}{\partial x^T} \cdots \frac{\partial \phi_{z_i}^i}{\partial x^T} f_i(\phi_{z_{i+1}}^{i+1} \circ \cdots \circ \phi_{z_1}^1(x^0)) \\ &= \frac{\partial \phi_{z_1}^1}{\partial x^T} \cdots \frac{\partial \phi_{z_i}^i}{\partial x^T} f_i((\phi_{z_i}^i)^{-1} \circ \cdots \circ (\phi_{z_1}^1)^{-1}(F(z))) \\ &= \frac{\partial \phi_{z_1}^1}{\partial x^T} \cdots \frac{\partial \phi_{z_i}^i}{\partial x^T} f_i(\phi_{z_i}^i \circ \cdots \circ \phi_{z_1}^1(F(z))) \end{aligned} \quad (7-18)$$

因为 $z=0$ 时, $F(0)=x^0$, 得

$$\left. \frac{\partial F(z)}{\partial z_i} \right|_{z=0} = f_i(x^0) \quad (7-19)$$

和

$$\left. \frac{\partial F(z)}{\partial z^T} \right|_{z=0} = (f_1(x^0) \cdots f_n(x^0)) \quad (7-20)$$

因为已假设 $f_1(x^0), \dots, f_n(x^0)$ 是线性独立的,所以 F 的 Jacobi 阵 $\partial F(z) / \partial z^T$ 的 n 列在 $z=0$ 是

线性独立的,其秩等于 n 。性质(1)得证。

证明性质(2)。在性质(1)的证明中,已经证明了对 $z \in U_\varepsilon$, Jacobi 阵 $\partial F(z)/\partial z^T$ 各列是线性独立的。要性质(2)成立,只需证明 $\partial F/\partial z^T$ 前 d 列

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} \in \Delta(F(z)) \quad 1 \leq i \leq d \quad (7-21)$$

成立。由式(7-18)知,前 d 列为

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z_1} &= \frac{\partial \phi_{z_1}^{f_1}(x)}{\partial x^T} f_1(\phi_{z_1}^{f_1}(F(z))) \\ &\dots \end{aligned} \quad (7-22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_d} = \frac{\partial \phi_{z_1}^{f_1}}{\partial x^T} \cdots \frac{\partial \phi_{z_d}^{f_d}}{\partial x^T} f_d(\phi_{z_d}^{f_d} \circ \cdots \circ \phi_{z_1}^{f_1}(F(z)))$$

要证明式(7-21)成立,只需证明以下事实:对在 x^0 一邻域中的所有 x 和小的 $|t|$,对属于 Δ 的任意两个向量场 τ 和 θ ,有式(7-23)成立。

$$\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^T} \tau \circ \phi_{-t}^\theta(x) \in \Delta(x) \quad (7-23)$$

即此式左端的向量场是属于 Δ 的局部有定义的向量场。此式成立,显然式(7-22)右端必属于 Δ ,从而式(7-21)成立。

下面证明式(7-23)。如果 θ 是 Δ 中一向量场,令向量场

$$V_i(t) = \frac{\partial \phi_{-t}^\theta}{\partial x^T} f_i \circ \phi_t^\theta(x) \quad i = 1, \dots, d \quad (7-24)$$

由式(2-16b)知

$$\frac{dV_i}{dt} = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij}(\phi_t^\theta(x)) V_j(t) \quad i = 1, \dots, d \quad (7-25)$$

这是一个关于向量场 $V_i(t)$ 的线性齐次方程。其解为

$$[V_1(t) \cdots V_d(t)] = [V_1(0) \cdots V_d(0)] X(t) \quad (7-26)$$

式中 $X(t)$ 是齐次方程的解矩阵。

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_{11}(\phi_t^\theta(x))} & \cdots & e^{\lambda_{d1}(\phi_t^\theta(x))} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_{1d}(\phi_t^\theta(x))} & \cdots & e^{\lambda_{dd}(\phi_t^\theta(x))} \end{bmatrix}$$

在式(7-26)两端左乘 $\partial \phi_t^\theta / \partial x^T$, 并把式(7-24)的 $V_i(t)$ 值代入, V_i 以 $f_i(x)$ 代入, 得

$$[f_1(\phi_t^\theta(x)) \cdots f_d(\phi_t^\theta(x))] = \left[\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^T} f_1(x) \cdots \frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^T} f_d(x) \right] X(t)$$

再用 $\phi_{-t}^\theta(x)$ 代替 x , 得到

$$[f_1(x) \cdots f_d(x)] = \left[\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^T} f_1(x) \circ \phi_{-t}^\theta(x) \cdots \frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^T} f_d(x) \circ \phi_{-t}^\theta(x) \right] X(t)$$

因为 $X(t)$ 对所有 t 非奇异, 可视为一满秩变换阵, 所以对 $i = 1, \dots, d$ 都有

$$\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^T} f_i \circ \phi_{-t}^\theta(x) \in \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$$

即

$$\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x^\top} f_i \circ \phi_{-t}^\theta(x) \in \Delta(x)$$

注意到 Δ 中任意向量场 τ 可表为

$$\tau = \sum_{i=1}^d c_i f_i$$

于是完成了式(7-23)的证明。同时也完成了性质(2)以至全定理的证明。

例 7.2 (按 Frobenius 定理,以线性系统为例求变换和解空间)考虑线性定常系统

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

右端二向量场张成分布

$$\Delta = \text{span}\{f_1(x), f_2(x)\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

首先,检查分布 Δ 是否满足 Frobenius 定理条件。分布 Δ 在集合 $\{x \in R^3 : x_2 \neq 0 \text{ 或 } x_3 \neq 0\}$ 上为二维,非奇异。关于分布 Δ 的对合性,只须检查

$$\begin{aligned} [f_1(x), f_2(x)] &= \frac{\partial f_2}{\partial x^\top} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x^\top} f_2(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Delta \end{aligned}$$

结果表明分布 Δ 对合。结论是分布 Δ 可积,可以继续以下计算。

其次,补充向量场。本例中 $n-d=3-2=1$,只需补充一个向量场。补充的向量场要与 $f_1(x), f_2(x)$ 一起构成基底向量场,并且在形式上应当尽量简单,以简化计算。这里选

$$f_3(x) = [0 \ 1 \ 0]^\top$$

再次,做流映射计算。按以下步骤进行。

第一步,计算向量场 $f_1(x)$ 的流 $\phi_t^{f_1}$ 。由 $\dot{x} = f_1(x)$ 的展开式和初始条件

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 & x_1(0) &= x_1^0 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 & x_2(0) &= x_2^0 \\ \dot{x}_3 &= x_3 & x_3(0) &= x_3^0 \end{aligned}$$

解得

$$x_1 = x_1^0 e^t \quad x_2 = x_2^0 e^{-t} \quad x_3 = x_3^0 e^t$$

因映射彼此相串,后一映射的输出就是前一映射的输入,所以把式中的 x^0 代换为一般的输入 x ,得到向量场 $f_1(x)$ 的流

$$\phi_t^{f_1}(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^t \\ x_2 e^{-t} \\ x_3 e^t \end{bmatrix}$$

为相区别,把 $f_1(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_1 ,得

$$\phi_{z_1}^{f_1}(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{z_1} \\ x_2 e^{-z_1} \\ x_3 e^{z_1} \end{bmatrix}$$

第二步, 计算向量场 $f_2(x)$ 的流 $\phi_t^{f_2}(x)$ 。由 $\dot{x} = f_2(x)$ 的展开式和初始条件

$$\dot{x}_1 = 1 \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad x_2(0) = x_2^0$$

$$\dot{x}_3 = 0 \quad x_3(0) = x_3^0$$

解得

$$x_1 = t + x_1^0 \quad x_2 = x_2^0 \quad x_3 = x_3^0$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_2(x)$ 的流

$$\phi_t^{f_2}(x) = \begin{bmatrix} t + x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

把 $f_2(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_2 , 得

$$\phi_{z_2}^{f_2}(x) = \begin{bmatrix} z_2 + x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第三步, 计算向量场 $f_3(x)$ 的流 $\phi_t^{f_3}(x)$ 。由 $\dot{x} = f_3(x)$ 的展开式和初始条件

$$\dot{x}_1 = 0 \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$\dot{x}_2 = 1 \quad x_2(0) = x_2^0$$

$$\dot{x}_3 = 0 \quad x_3(0) = x_3^0$$

解得

$$x_1 = x_1^0 \quad x_2 = t + x_2^0 \quad x_3 = x_3^0$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_3(x)$ 的流

$$\phi_t^{f_3}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ t + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

把 $f_3(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_3 , 得

$$\phi_{z_3}^{f_3}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ z_3 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第四步, 做流映射复合, 得到坐标变换函数

$$x = F(z_1, z_2, z_3) = \phi_{z_1}^{f_1} \circ \phi_{z_2}^{f_2} \circ \phi_{z_3}^{f_3}(x^0)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \phi_{z_1}^{f_1} \circ \phi_{z_2}^{f_2} \circ \begin{bmatrix} x_1^0 \\ z_3 + x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \phi_{z_1}^{f_1} \circ \begin{bmatrix} z_2 + x_1^0 \\ z_3 + x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_2 + x_1^0)e^{z_1} \\ (z_3 + x_2^0)e^{-z_1} \\ x_3^0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

相应的逆映射函数为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = F^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \frac{x_3}{x_3^0} \\ \frac{x_1 x_3^0}{x_3} - x_1^0 \\ \frac{x_2 x_3}{x_3^0} - x_2^0 \end{bmatrix}$$

再其次,寻找 $n-d$ 个表示 Δ^\perp 的光滑函数。本例中 $n-d=3-2=1$, 只须找一个函数 $\lambda(x)$ 。因为 Frobenius 定理已证明 $\phi(x)$ 的后 $n-d$ 个分量就是偏微分方程式(7-7)的解, 所以在本例中, $\lambda(x)$ 就是 $\phi_3(x)$, 得

$$\lambda(x) = \phi_3(x) = \frac{x_2 x_3}{x_3^0} - x_2^0$$

它满足

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} F_M(x) = \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^T} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ -x_2 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

最后,求解空间。解空间应满足 $\lambda(x) - \lambda(x^0) = 0$ 。这里因为 $\lambda(x^0) = 0$, 所以解空间的表达式是 $\lambda(x) = 0$, 也就是 $x_2 x_3 = x_2^0 x_3^0$ 。此解空间是过 x^0 点的双曲面, 双曲面的母线平行于坐标轴 x_1 。

本例是一个线性系统, 不难得到系统的解, 即积分曲线。这里为简单起见, 假设系统输入 u 保持不变常值 u_c , 得到的解是

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1^0 + u_c) e^t - u_c \\ x_2 &= x_2^0 e^{-t} \\ x_3 &= x_3^0 e^t \end{aligned}$$

可见积分曲线确实在解空间 $x_2 x_3 = x_2^0 x_3^0$ 中。

例 7.3 (按 Frobenius 定理对非线性系统求变换和解空间) 考虑非线性系统

$$\dot{x} = f_1(x) = \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

右端分布

$$\Delta = \text{span}\{f_1(x)\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

首先,检查分布 Δ 是否满足 Frobenius 定理条件。分布 Δ 在 $x \in R^2$ 上为一维, 非奇异。一维分布必对合。结果表明分布 Δ 可积, 可以继续以下计算。

其次,补充向量场。本例中 $n-d=2-1=1$, 只需补充一个向量场。补充的向量场要与 $f_1(x)$ 一起构成基底向量场, 并且在形式上应当尽量简单, 以简化计算。这里选

$$f_3(x) = [1 \ 0]^T$$

再次,做流映射计算。按以下步骤进行。

第一步,计算向量场 $f_1(x)$ 的流 $\phi_t^1(x)$ 。由 $\dot{x} = f_1(x)$ 的展开式和初始条件

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \exp(x_2) & x_1(0) &= x_1^0 \\ \dot{x}_2 &= 1 & x_2(0) &= x_2^0 \end{aligned}$$

解得
$$x_1(t) = e^{x_2^0}(e^t - 1) + x_1^0 \quad x_2(t) = t + x_2^0$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_1(x)$ 的流

$$\phi_t^{f_1}(x) = \begin{bmatrix} e^{x_2}(e^t - 1) + x_1 \\ t + x_2 \end{bmatrix}$$

为相区别, 把 $f_1(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_1 , 得

$$\phi_{z_1}^{f_1}(x) = \begin{bmatrix} e^{x_2}(e^{z_1} - 1) + x_1 \\ z_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

第二步, 计算向量场 $f_2(x)$ 的流 $\phi_t^{f_2}(x)$ 。由 $\dot{x} = f_2(x)$ 的展开式和初始条件

$$\dot{x}_1 = 1 \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad x_2(0) = x_2^0$$

解得

$$x_1 = t + x_1^0 \quad x_2 = x_2^0$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_2(x)$ 的流为

$$\phi_t^{f_2}(x) = \begin{bmatrix} t + x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

把 $f_2(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_2 , 得

$$\phi_{z_2}^{f_2}(x) = \begin{bmatrix} z_2 + x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

第三步, 做流映射复合得到坐标变换函数, 这里假设 $x^0 = 0$, 有

$$x = F(z_1, z_2) = \phi_{z_1}^{f_1} \circ \phi_{z_2}^{f_2}(x^0)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \phi_{z_1}^{f_1} \circ \begin{bmatrix} z_2 + x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_2}(e^{z_1} - 1) + x_1 \\ z_1 + x_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} z_2 + x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(x^0)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{x_2}(e^{z_1} - 1) + x_1 \\ z_1 + x_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} z_2 + x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{z_1} - 1 + z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

相应的逆映射函数为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F^{-1}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - e^{x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

再其次, 寻找 $n - d$ 个表示 Δ^\perp 的光滑函数。本例中 $n - d = 2 - 1 = 1$, 只须找一个函数 $\lambda(x)$ 。因为 Frobenius 定理已证明, $\phi(x)$ 的后 $n - d$ 个分量就是偏微分方程式(7-7)的解, 所以在本例中, $\lambda(x)$ 就是 $\phi_2(x)$, 得

$$\lambda(x) = \phi_2(x) = x_1 - e^{x_2} + 1$$

它满足

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^\top} f_1(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^\top} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

最后, 求解空间。解空间应满足 $\lambda(x) - \lambda(x^0) = 0$ 。这里因为 $\lambda(x^0) = 0$, 所以解空间的表达式是 $\lambda(x) = 0$, 也就是 $x_1 = e^{x_2} - 1$ 。此解空间是过 $x^0 = 0$ 点的指数曲线。

不难得到本系统的解, 即积分曲线。其解是

$$x_1 = e^t - 1$$

$$x_2 = t$$

可见积分曲线确实在解空间 $x_1 = e^{x_2} - 1$ 中。

例 7.4 (按 Frobenius 定理对非线性系统求变换和解空间) 非线性系统右端分布

$$\Delta = \text{span}\{f_1(x), f_2(x)\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right\}$$

首先, 检查分布 Δ 是否满足 Frobenius 定理条件。分布 Δ 在集合 $\{x \in R^3 : x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$ 上为二维, 非奇异。关于分布 Δ 的对合性, 只须检查

$$\begin{aligned} [f_1(x), f_2(x)] &= \frac{\partial f_2}{\partial x^T} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x^T} f_2(x) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Delta \end{aligned}$$

结果表明分布 Δ 对合。结论是分布 Δ 可积, 可以继续以下计算。

其次, 补充向量场。本例中 $n - d = 3 - 2 = 1$, 只需补充一个向量场。补充的向量场要与 $f_1(x), f_2(x)$ 一起构成基底向量场, 并且在形式上应当尽量简单, 以简化计算。这里选

$$f_3(x) = [1 \ 0 \ 0]^T$$

再次, 做流映射计算。按以下步骤进行。

第一步, 计算向量场 $f_1(x)$ 的流 $\phi_t^{f_1}(x)$ 。由 $\dot{x} = f_1(x)$ 的展开式和初始条件

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_3 & x_1(0) &= x_1^0 \\ \dot{x}_2 &= -1 & x_2(0) &= x_2^0 \\ \dot{x}_3 &= 0 & x_3(0) &= x_3^0 \end{aligned}$$

解得
$$x_1 = x_1^0 + 2x_3^0 t \quad x_2 = -t + x_2^0 \quad x_3 = x_3^0$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_1(x)$ 的流

$$\phi_t^{f_1}(x) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 t \\ -t + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

为相区别, 把 $f_1(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_1 , 得

$$\phi_{z_1}^{f_1}(x) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 z_1 \\ -z_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第二步, 计算向量场 $f_2(x)$ 的流 $\phi_t^{f_2}(x)$ 。由 $\dot{x} = f_2(x)$ 的展开式和初始条件

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 & x_1(0) &= x_1^0 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 & x_2(0) &= x_2^0 \\ \dot{x}_3 &= x_3 & x_3(0) &= x_3^0 \end{aligned}$$

解得
$$x_1 = x_1^0 e^{-t} \quad x_2 = x_2^0 e^{-2t} \quad x_3 = x_3^0 e^t$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_2(x)$ 的流

$$\phi_t^f(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^{-2t} \\ x_3 e^t \end{bmatrix}$$

把 $f_2(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_2 , 得

$$\phi_{z_2}^f(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-z_2} \\ x_2 e^{-2z_2} \\ x_3 e^{z_2} \end{bmatrix}$$

第三步, 计算向量场 $f_3(x)$ 的流 $\phi_t^f(x)$ 。由 $\dot{x} = f_3(x)$ 的展开式和初始条件

$$\dot{x}_1 = 1 \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad x_2(0) = x_2^0$$

$$\dot{x}_3 = 0 \quad x_3(0) = x_3^0$$

解得

$$x_1 = t + x_1^0 \quad x_2 = x_2^0 \quad x_3 = x_3^0$$

把式中的 x^0 代换为 x , 得到向量场 $f_3(x)$ 的流

$$\phi_t^f(x) = \begin{bmatrix} t + x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

把 $f_3(x)$ 下的流映射对应的时间记为 z_3 , 得

$$\phi_{z_3}^f(z) = \begin{bmatrix} z_3 + x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第四步, 做流映射复合, 得到坐标变换函数

$$x = F(z_1, z_2, z_3) = \phi_{z_1}^f \circ \phi_{z_2}^f \circ \phi_{z_3}^f(x^0)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 z_1 \\ -z_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} e^{-z_2} x_1 \\ x_2 e^{-2z_2} \\ x_3 e^{z_2} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} z_3 + x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 z_1 \\ -z_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} e^{-z_2} (z_3 + x_1^0) \\ x_2^0 e^{-2z_2} \\ x_3^0 e^{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_3 + x_1^0) e^{-z_2} + 2x_3^0 e^{z_2} z_1 \\ -z_1 + x_2^0 e^{-2z_2} \\ x_3^0 e^{z_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在 $x^0 = (0, 0, 1)$ 时, 有

$$x = F(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} z_3 e^{-z_2} + 2e^{z_2} z_1 \\ -z_1 \\ e^{z_2} \end{bmatrix}$$

相应的逆映射函数为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = F^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ \ln(x_3) \\ (x_1 + 2x_2 x_3) x_3 \end{bmatrix}$$

再其次,寻找 $n-d$ 个表示 Δ^\perp 的光滑函数。本例中 $n-d=3-2=1$, 只须找一个函数 $\lambda(x)$ 。因为 Frobenius 定理已证明 $\phi(x)$ 的后 $n-d$ 个分量就是偏微分方程式(7-7)的解, 所以在本例中 $\lambda(x)$ 就是 $\phi_3(x)$, 得 $\lambda(x)=\phi_3(x)=(x_1+2x_2x_3)x_3$ 。它满足

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^\top} F_M(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x^\top} \begin{bmatrix} 2x_3 & -x \\ -1 & -2x_2 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix} = 0$$

最后,求解空间。解空间应满足 $\lambda(x)-\lambda(x^0)=0$ 。这里因为 $\lambda(x^0)=0$, 所以解空间的表达式是 $\lambda(x)=0$, 也就是 $x_1+2x_2x_3=0$ 。此解空间是一过 $x^0=(0,0,1)$ 点的曲面。注意, $x_3=0$ 不是解空间, 因为 $x_3^0=1$ 不在该平面上。

第 8 章 控制系统的局部 能控能观性分解

向量场和对偶向量场在适当的坐标系下可以取更简单的形式,可以明白地表示出系统状态变量与各输入量、输出量之间是否相互关联。坐标变换的这一性质使控制系统的能控性分解和能观性分解成为可能。8.1 节阐明向量场和对偶向量场的基本简化关系。后面各节分别讨论局部能控性和局部能观性分解定理,分别给出了分解实例。8.2 节和 8.3 节讨论基于不变分布的分解定理。8.4 节和 8.5 节针对仿射型控制系统定义了 P 分布、 Q 分布和 R 分布,讨论了基于不变最小分布的分解定理,最后给出了局部能控和局部能观的分布维数条件。

8.1 向量场和对偶向量场变换后向量形式的简化

8.1.1 概述

线性系统理论已经表明,线性时不变系统和线性时变系统都可以通过一适当的线性非奇异变换,实现能控性结构分解、能观性结构分解,或同时实现两种结构分解。这里的分解,自然是针对不全状态能控系统或不全状态能观系统而言。全状态能控又全状态能观的系统 and 所有状态都既不能控也不能观的系统不涉及分解问题。线性系统的结构分解是全局性的分解,一般无局部分解和全局分解之分。

本章将把结构分解概念推广到非线性系统,讨论非线性系统的分解问题。非线性系统的结构分解同样分为能控性分解和能观性分解两类。非线性系统的分解与线性系统分解的重要区别之一是,一般的非线性系统有局部分解和全局分解之分。另一重要区别是,非线性系统一般不可能如线性系统那样在同一变换下同时实现两种分解,为实现不同的结构分解,一般必须分别采用不同的变换。此外,和线性系统一样,能控性分解只能针对不全状态能控系统进行;能观性分解只能针对不全状态能观系统进行。

非线性系统的结构分解,将把系统分解为状态能控部分和状态不能控部分,或状态能观部分和状态不能观部分。研究系统结构的分解,有助于更深刻地了解系统的结构特性,有助于深入地揭示系统各状态变量间、状态变量和控制量间、状态变量和被观测输出量间的联系,并可直接用于系统的能控性解耦或能观性解耦。同时这也是使系统得以简化的途径。在下面,能控性分解和能观性分解将作为两部分分别加以讨论。每一情况下,先介绍分解定理,随后给出分解实例。

本书只限于讨论时不变非线性系统的能控、能观分解。局部分解在本章讨论,全局分解将在下一章中讨论。本章讨论局部分解的理论基础是 Frobenius 定理(第 7 章)和不变分布(第 3 章)。在介绍分解定理之前,还有必要进一步给出关于 Frobenius 定理和不变分布的一

些结果。它们都是与结构分解密切相关的。这些结果就在紧随的下一小节中。

8.1.2 Δ 内向量场在 $z = \phi(x)$ 变换后向量形式的简化

在 Frobenius 定理的证明中,定义了式(7-14)的非线性局部坐标变换和式(7-15)的逆变换。并根据式(7-17)证明了结论: $\partial\phi/\partial x^T$ 的后 $n-d$ 行张成了对偶分布 $\Delta^\perp(x)$ 。

设 $\tau(x)$ 是 Δ 内的向量场,按式(6-19)的结果, $\tau(x)$ 变换后应为

$$\bar{\tau}(z) = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x^T} \tau(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (8-1)$$

因为 $\frac{\partial\phi}{\partial x^T}$ 的后 $n-d$ 行是对偶分布 $\Delta^\perp(x)$ 的基底,可以零化 $\tau(x)$,所以在变换后的新坐标下必有

$$\bar{\tau}(z) = (\bar{\tau}_1(z) \quad \cdots \quad \bar{\tau}_d(z) \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T \quad (8-2)$$

8.1.3 Δ^\perp 内对偶向量场在 $z = \phi(x)$ 变换后向量形式的简化

在 Frobenius 定理的证明中,定义了式(7-14)的非线性局部坐标变换和式(7-15)的逆变换。该变换的性质(2)是

$$\left[\frac{\partial x}{\partial z^T} \right]$$

的前 d 列是分布 $\Delta(x(z))$ 中的 d 个线性独立向量。

设 $\omega(x)$ 是 Δ^\perp 中的对偶向量场,由式(6-23), $\omega(x)$ 变换的公式是

$$\bar{\omega}(z) = \omega(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \quad (8-3)$$

因为 $\frac{\partial x}{\partial z^T}$ 的前 d 列是分布 $\Delta(x(z))$ 的基底,可以零化 $\omega(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}$,所以在变换后的新坐标下必有

$$\bar{\omega}(z) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad \bar{\omega}_{d+1} \quad \cdots \quad \bar{\omega}_n) \quad (8-4)$$

8.1.4 Δ 外向量场在 $z = \phi(x)$ 变换后向量形式的简化

定理 8.1 设 Δ 是一个 d 维非奇异对合分布,并且在向量场 f 下不变, $f \in \Delta$, 则每点 $x^0 \in U$ 都存在一邻域 U^0 和定义在 U^0 的,由式(7-14)所表示的坐标映射 $z = \phi(x)$,在变换后使 f 可简化表示为

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(z_1, \cdots, z_d, z_{d+1}, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ \bar{f}_d(z_1, \cdots, z_d, z_{d+1}, \cdots, z_n) \\ \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(z_{d+1}, \cdots, z_n) \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

证明 要证明式(8-5)成立,只需证明坐标变换后的向量场 $\bar{f}(z)$ 满足

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_i} = 0 \quad \forall d+1 \leq k \leq n \quad 1 \leq i \leq d$$

(证法 1) 因为分布 Δ 非奇异、对合, 所以可积。因此, 在每点 x^0 , 存在一邻域 U^0 和定义在 U^0 的式(7-14)的坐标变换 $z = \phi(x)$, 其后 $n-d$ 个分量具有性质

$$\text{span}\{d\phi_{d+1}, \dots, d\phi_n\} = \Delta^\perp$$

从而使每个 Δ 内向量场的后 $n-d$ 个分量为零, 即有式(8-2)的形式。

今特别设计一向量场 $\tau(x)$, 变换后为 $\tau(z) = (\tau_1(z) \ \cdots \ \tau_n(z))^T$, 满足

$$\tau_k(z) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}$$

式中, i 是一个参变数。于是有

$$[\bar{f}, \tau] = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial z^T} \tau = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_i}$$

如果限制 $1 \leq i \leq d$, 则 $\tau(z)$ 的后 $n-d$ 个分量为零, 显然 $\tau(z) \in \Delta(x(z))$ 。又因为 $\Delta(x(z))$ 在向量场 \bar{f} 下不变, 所以又有 $[\bar{f}, \tau] \in \Delta(x(z))$, 从而

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_i} \in \Delta(x(z)) \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

因为 $\Delta(x(z))$ 内向量场的后 $n-d$ 个分量必为零, 所以, 最后得

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_i} = 0 \quad \forall d+1 \leq k \leq n \quad 1 \leq i \leq d$$

定理得证。

(证法 2) 作为分布不变性的练习, 这里给出本定理的第二种证明方法。因为采用式(7-14)的坐标映射 $z = \phi(x)$, 所以由式(8-4), $\Delta^\perp(x(z))$ 中任意对偶向量场 $\bar{\omega}$ 必有形式

$$\bar{\omega}(z) = (0 \ \cdots \ 0 \ \bar{\omega}_{d+1} \ \cdots \ \bar{\omega}_n) \quad (8-6)$$

又因为已知 $\Delta(x(z))$ 非奇异, 且在向量场 \bar{f} 下不变, 由分布不变性的性质 3, 其正交对偶分布也不变, 即必满足

$$L_{\bar{f}} \Delta^\perp(x(z)) \subset \Delta^\perp(x(z)) \quad (8-7)$$

因为新坐标系的基底 ϕ_1, \dots, ϕ_n 写成 z 的函数是

$$\phi_k(z) = z_k \quad 1 \leq k \leq n$$

这意味着

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial z_i} = \delta_{ki} \quad 1 \leq k, i \leq n$$

得

$$L_{\bar{f}} \phi_k(z) = \frac{\partial \phi_k}{\partial z^T} \bar{f}(z) = \langle d\phi_k(z), \bar{f}(z) \rangle = \bar{f}_k(z) \quad 1 \leq k \leq n$$

注意到式(2-39), 可推得

$$L_{\bar{f}} d\phi_k(z) = dL_{\bar{f}} \phi_k(z) = d\bar{f}_k(z) = \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z^T} \quad 1 \leq k \leq n$$

因为

$$d\phi_k \in \Delta^\perp(x(z)) \quad d+1 \leq i \leq n$$

注意到式(8-7), 可得

$$L_{\bar{f}} d\phi_k(z) = d\bar{f}_k(z) \in \Delta^\perp(x(z))$$

故 $d\bar{f}_k(z)$ 应有式(8-6)的形式。这说明下式成立, 从而定理得证。

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_i} = 0 \quad \forall d+1 \leq k \leq n \quad 1 \leq i \leq d$$

8.1.5 在 f 下的不变性意味着 f 的右上三角化

对非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (8-8)$$

来说,定理 8.1 的一个重要结果是,阐明了分布 Δ 在 f 下的不变性将导致 f 的结构变为右上三角形形式。为证实这一结果,假设 $\Delta(x) = \text{span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ 是一个 d 维非奇异对合分布,已根据 Δ 内的向量场得到了定义在 x^0 邻域 U^0 的,以式(7-14)表示的坐标映射 $z = \phi(x)$ 。假设向量场 $f \in \Delta$,但 Δ 在 f 下不变。在以上假设下,定理 8.1 成立。为清楚起见,令

$$\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d) \quad \zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$$

则系统式(8-8)中的 $f(x)$ 在变换后可表示为

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \bar{f}_2(\zeta_2) \end{bmatrix} \quad (8-9)$$

这就是所谓的右上三角结构。此结构是在分布 Δ 在 f 下不变的假设下得到的。

如果系统式(8-8)退化为线性系统,即

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8-10)$$

相当于 $f(x) = Ax$ 。把矩阵 B 的各列视为 m 个向量场,它们张成分布 Δ 。在 Δ 在向量场 Ax 下不变的假设下, Ax 经坐标变换后得到的右上三角结构是

$$\bar{f}(z) = \bar{A}z = \begin{bmatrix} A_{11}\zeta_1 & A_{12}\zeta_2 \\ 0 & A_{22}\zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (8-11)$$

8.2 基于不变分布的控制系统局部能控性分解

8.2.1 局部能控性分解定理

定理 8.2 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (8-12)$$

设 $\Delta(x)$ 是一个 d 维非奇异对合分布,包含分布 $\text{span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$,并且在向量场 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 下不变,则对每点 x^0 ,可找到 x^0 邻域 U^0 和定义在 U^0 的形如式(7-14)的局部坐标变换 $z = \phi(x)$,使在新坐标下,控制系统式(8-12)可表示为

$$\dot{\zeta}_1 = \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2) u_i \quad (8-13a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \bar{f}_2(\zeta_2) \quad (8-13b)$$

式中, $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d), \zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ 。

定理 8.2 是基于 Frobenius 定理和不变分布的有关定理得到的结果。由定理 8.2 得到的分解式(8-13)可以看到, ζ_2 的 $n-d$ 个状态变量与控制变量 u_1, \dots, u_m 无关,是不能控的。

证明 设系统式(8-12)在坐标变换后的形式是

$$\dot{z} = \bar{f}(z) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(z) u_i$$

分布 Δ 外向量场 f 的简化。 $f(x)$ 是分布 $\Delta(x)$ 之外的向量场。因为分布 $\Delta(x)$ 非奇异、对合,并且在向量场 $f(x)$ 下不变,满足定理 8.1 的假设,所以 $f(x)$ 在坐标变换后的结果与式(8-5)相同,有

$$\bar{f}(z) = \bar{f}(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \bar{f}_2(\zeta_2) \end{bmatrix}$$

分布 Δ 内向量场 g_1, \dots, g_m 的简化。 $g_1(x), \dots, g_m(x)$ 是 $\Delta(x)$ 内向量场。因满足简化式(8-2)所需的假设条件,在式(7-14)的局部坐标变换 $z = \phi(x)$ 下,可按式(8-2)简化 $g_1(x), \dots, g_m(x)$, 结果是

$$\bar{g}_i(z) = \bar{g}_i(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{i1}(\zeta_1, \zeta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m$$

把 $\bar{f}(z), \bar{g}_1(z), \dots, \bar{g}_m(z)$ 代入系统方程坐标变换后的形式,即得式(8-13),定理得证。

8.2.2 能控性分解举例

例 8.1 (基于不变分布的非线性系统的局部能控性分解)非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的能控性分解可分以下三步完成。

1. 设计分布使满足能控性分解定理 8.1 的条件

(1) 分布应包含向量场 $g(x)$, 为此初选

$$\Delta_0(x) = \text{span}\{g(x)\}$$

(2) 分布应在向量场 $f(x), g(x)$ 下不变, 即满足

$$[f(x), g(x)] \in \Delta_0(x)$$

因为

$$[f(x), g(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} x_2 & x_1 & e^{x_3} + x_3 e^{x_3} & 0 \\ 0 & -x_3 & -x_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 - x_3^2 & x_4 - 2x_3 x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \Delta_0$$

所以必须对分布 Δ 进行扩充。 $\Delta_0(x)$ 扩充 $[f(x), g(x)]$ 后, 得到

$$\Delta_1(x) = \text{span}\{g(x), [f(x), g(x)]\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

扩充后的分布 $\Delta_1(x)$ 要满足在 $f(x), g(x)$ 下不变的条件, 除满足 $[f(x), g(x)] \in \Delta_1(x)$ 之外, 还必须进一步满足

$$[f(x), [f(x), g(x)]] \in \Delta_1(x)$$

$$[g(x), [f(x), g(x)]] \in \Delta_1(x)$$

经计算得

$$[f(x), [f(x), g(x)]] = \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Delta_1(x)$$

$$[g(x), [f(x), g(x)]] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Delta_1(x)$$

分布 $\Delta_1(x)$ 在 $f(x), g(x)$ 下不变的条件已得以满足。

(3) 分布 $\Delta_1(x)$ 的维数 $d = 2$ 不会改变, $\Delta_1(x)$ 非奇异。因 $[g(x), [f(x), g(x)]] \in \Delta_1(x)$, 按对合充要条件, $\Delta_1(x)$ 对合。

综上所述, 本例的非线性系统, 选择 $\Delta_1(x)$ 分布后, 可满足能控性分解定理 8.1 各条件, 系统能实现能控性分解。下面开始进行分解。

2. 构造坐标变换阵 $z = \phi(x)$

因为分布 $\Delta_1(x)$ 对合, 由 Frobenius 定理, $\Delta_1(x)$ 完全可积, 即必可找到 $n - d = 4 - 2 = 2$ 个函数 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$, 使

$$\text{span}\{d\lambda_1, d\lambda_2\} = \Delta_1^\perp(x)$$

也就是说

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^T} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & e^{-x_3} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意到 $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$, 此式展开后得到

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_4} x_2 = 0 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = 0$$

由此二式得

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_4} x_2 = 0$$

据此得到二独立解

$$\lambda_1(x) = x_2 \quad \lambda_2(x) = x_4 - x_2 x_3$$

利用 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ 构造变换, 取

$$\begin{aligned} z_3 &= \phi_3(x) = \lambda_1(x) = x_2 \\ z_4 &= \phi_4(x) = \lambda_2(x) = x_4 - x_2 x_3 \end{aligned}$$

补选相互独立的变换函数

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_4$$

最后得到变换和反变换为

$$\begin{aligned} z = \phi(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \end{bmatrix} \\ x = F(z) = \phi^{-1}(z) &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_4 + z_2 z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. 能控性分解

使向量场 $f(x), g(x)$ 作坐标变换, 变化后得到

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_1 z_3 + z_2 e^{z_3} \\ z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{g}(z) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代回系统方程, 得到 z 坐标下的系统表达式

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_1 z_3 + z_2 e^{z_3} \\ z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

这也是最后的分解结果。显然 z_3, z_4 是不能控的。

8.3 基于不变分布的控制系统局部能观性分解

8.3.1 能观性分解定理

定理 8.3 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (8-14a)$$

$$y = h_i(x) \quad i = 1, \dots, p \quad (8-14b)$$

设 $\Delta(x)$ 是 d 维非奇异对合分布, 在向量场 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 下不变, 并且对偶分布 $\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$ 被包含在 $\Delta^\perp(x)$ 中, 则对每点 x^0 可找到 x^0 的一个邻域 U^0 和定义在 U^0 的局部坐标变换 $z = \phi(x)$ 。在新坐标下, 系统方程式(8-14)可表示为

$$\dot{\zeta}_1 = \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2) u_i \quad (8-15a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \bar{f}_2(\zeta_2) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{2i}(\zeta_2) u_i \quad (8-15b)$$

$$y_i = \bar{h}_i(\zeta_2) \quad i = 1, \dots, p \quad (8-15c)$$

由定理 8.3 的分解式(8-15)可以看到, ζ_1 的 d 个状态变量与观测变量 y_1, \dots, y_p 无关, 是不能观的。

证明 设系统式(8-14)在坐标变换后的形式是

$$\dot{z} = \bar{f}(z) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(z) u_i$$

$$y_i = \bar{h}_i(z) \quad i = 1, \dots, p$$

分布 $\Delta(x)$ 外向量场 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 的简化。因为 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 是分布 $\Delta(x)$ 之外的向量场, 应按式(8-5)进行简化。因分布 $\Delta(x)$ 非奇异、对合, 并且在向量场 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 下不变, 满足定理 8.1 的假设, 可找到坐标变换 $z = \phi(x)$, 实现式(8-5)的简化。 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 在坐标变换后的简化式是

$$\bar{f}(z) = \bar{f}(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \bar{f}_2(\zeta_2) \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}_i(z) = \bar{g}_i(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{i1}(\zeta_1, \zeta_2) \\ \bar{g}_{i2}(\zeta_2) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

分布的零化子 $\Delta^\perp(x)$ 内对偶向量场 dh_1, \dots, dh_p 的简化。因为 dh_1, \dots, dh_p 是 $\Delta^\perp(x)$ 内对偶向量场, 应按式(8-4)简化。在式(7-14)的局部坐标变换 $z = \phi(x)$ 下, 变换后可得

$$d\bar{h}_i(z) = d\bar{h}_i(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \zeta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] & \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \zeta_2} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, p$$

也就是

$$\bar{h}_i(z) = \bar{h}_i(\zeta_2) \quad i = 1, \dots, p$$

把以上结果代入坐标变换后的系统方程, 即得证。

例 8.2 (基于不变分布的非线性系统的能观性分解)非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

式中向量场

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ -x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

输出函数为

$$h(x) = x_3$$

分三步完成该系统的不能观性分解。

1. 设计 $\Delta^\perp(x)$ 使满足不能观性分解定理条件

(1) 分布的零化子 $\Delta^\perp(x)$ 应包含对偶向量场 $\text{span}\{dh\}$, 为此初选

$$\Delta_0^\perp(x) = \text{span}\{dh\} = \text{span}\{[0 \ 0 \ 1 \ 0]\}$$

(2) 分布 $\Delta(x)$ 应在向量场 $f(x), g(x)$ 下不变, 根据对偶分布不变性的性质 1, 这只需要求分布 $\Delta(x)$ 的零化子 $\Delta^\perp(x)$ 在向量场 $f(x), g(x)$ 下不变。为此, 让我们首先考察 $\Delta^\perp(x)$ 在向量场 $f(x), g(x)$ 下是否不变。因为

$$\begin{aligned}L_f dh &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (dh) f \right)^T + dh \frac{\partial f}{\partial x^T} \\ &= [0] + [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & e^{x_3} + x_3 e^{x_3} & 0 \\ 0 & -x_3 & -x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 - x_3^2 & x_4 - 2x_2 x_3 & x_3 \end{bmatrix} \\ &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \notin \Delta_0^\perp(x) \\ L_g dh &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (dh) g \right)^T + dh \frac{\partial g}{\partial x^T} \\ &= [0] + [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] \in \Delta_0^\perp(x)\end{aligned}$$

表明 $L_f dh \notin \Delta_0^\perp(x)$, 所以需对 $\Delta_0^\perp(x)$ 进行扩充。改取

$$\Delta_1^\perp(x) = \text{span}\{dh, L_f h\} = \text{span}\{[0 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 0 \ 0]\}$$

检验 $\Delta_1^\perp(x)$ 在向量场 $f(x), g(x)$ 下的不变性。计算

$$\begin{aligned}L_f(L_f dh) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (L_f dh) f \right)^T + L_f dh \frac{\partial f}{\partial x^T} \\ &= (0 \ -x_3 \ -x_2 \ 0) \in \Delta_1^\perp(x) \\ L_g(L_f dh) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (L_f dh) g \right)^T + L_f dh \frac{\partial g}{\partial x^T}\end{aligned}$$

$$=[0 \ 0 \ 0 \ 0] \in \Delta_1^\perp(x)$$

这说明 $\Delta_1^\perp(x)$ 在向量场 $f(x), g(x)$ 下是不变的。因此, $\Delta_1(x)$ 也是在向量场 $f(x), g(x)$ 下不变的。

(3) 分布 $\Delta_1(x)$ 应当是非奇异的, 对合的。根据 $\Delta_1(x), \Delta_1^\perp(x)$ 间的正交关系, 显然

$$\Delta_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \{f_3(x), f_4(x)\}$$

可见 $\Delta_1(x)$ 是非奇异的和对合的。

综上所述, 本例的非线性系统, 选择分布 $\Delta_1(x)$ 后可满足不能观性分解定理 8.3 的全部条件, 系统能实现不能观性分解。下面开始进行分解。

2. 构造坐标变换阵 $z = \phi(x)$

因为

$$\Delta_1^\perp(x) = \text{span} \{dh, L_f dh\}$$

满足

$$\begin{bmatrix} dh \\ L_f dh \end{bmatrix} [f_3 \ f_4] = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以可选

$$z_3 = \lambda_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_4 = \lambda_2(x) = L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^\top} f(x) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] f(x) = x_2$$

另外补选

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_4$$

得变换和反变换为

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

3. 不能观性分解

使向量场 $f(x), g(x)$ 作坐标变换, 变化后得到

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^\top} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_3^2 x_2 \\ x_2 \\ -x_2 x_3 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 z_4 + z_3 e^{z_2} \\ z_4^2 + z_2 z_3 - z_3^2 z_4 \\ z_4 \\ -z_3 z_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

函数 $h(x)$ 作坐标变换, 变化后得到

$$\bar{h}(z) = h(x)_{x=\phi^{-1}(z)} = z_3$$

代入变换后的系统方程, 得到 z 坐标下的系统表达式

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_1 z_4 + z_3 e^{z_3} \\ z_4^2 + z_2 z_3 - z_3^2 z_4 \\ z_4 \\ -z_3 z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = z_3$$

这就是最后的分解结果。显然输出 y 不受 z_1, z_2 影响, 状态 z_1, z_2 是不能观的。

8.4 控制系统的不变最小分布和局部能控性分解定理

8.4.1 控制系统的不变最小分布

8.4.1.1 P 分布和 R 分布的定义

定义 8.1 针对非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

定义两个不变最小分布。其一是

$$P = \langle f, g_1, \dots, g_m \mid \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \rangle$$

称 P 分布(distribution P); 其二是

$$R = \langle f, g_1, \dots, g_m \mid \text{span}\{f, g_1, \dots, g_m\} \rangle$$

称 R 分布(distribution R)。

8.4.1.2 P 分布和 R 分布的关系

引理 8.4 分布 P 和 R 的关系:

- (1) $P + \text{span}\{f\} \subset R$, 即左端两分布的并被 R 包含;
- (2) 如果 x 是 $P + \text{span}\{f\}$ 的正则点, 则 $(P + \text{span}\{f\})(x) = R(x)$ 。

证明 (1) 按定义, $P \subset R, f \in R$, 都属于 R , 故(1)成立。

(2) 由引理 5.4, 在 U 的开稠子流形 U^* 的每点 x 的邻域, R 分布由如下形式的向量场

张成

$$\theta_i = [v_r, [v_{r-1}, \dots, [v_1, v_0]]] \quad (8-16)$$

式中, $r \leq n-1$ 是一个(可能与有关的)整数, v_0, \dots, v_r 是 $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ 中的向量场。首先, 证明 θ_i 形式的向量场都属于 $P + \text{span}\{f\}$, 事实上, 如果 θ_i 恰是 $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ 中的向量场, 则它属于 P 或属于 $\text{span}\{f\}$; 如果 θ_i 有式(8-16)的形式, 不失一般性, 假定 v_0 在集合 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 中, 得到

$$\theta_i = [v_r, [v_{r-1}, \dots, [v_1, g_j]]] \quad (8-17)$$

(注: 如果 $v_0 = f$, 则可能有两种情况。其一是 $v_0 = v_1 = f$, 则 $\theta_i = 0$; 其二是 $v_0 = f, v_2 = g_j$, 则仍属式(8-17)形式。)按 P 定义, P 包含 g_j , 并在 f, g_1, \dots, g_m 下不变, 故 $\theta_i \in P$ 。于是 θ_i 形式的向量场都属于 $P + \text{span}\{f\}$, 得证。这就证明了在 U 的开稠子流形 U^* 上, 有

$$R \subset P + \text{span}\{f\}$$

其次, 因为由(1)的结果, $P + \text{span}\{f\} \subset R$, 所以, 在开稠子流形 U^* 上必有

$$R = P + \text{span}\{f\}$$

最后, 着手证明(2)本身。假设在某个邻域 V 上, $P + \text{span}\{f\}$ 有不变的维数, 由 3.1.3 节分布光滑性的性质 4 知, 分布 R 和分布 $P + \text{span}\{f\}$ 在 V 上重合。证毕。

推论 8.5 (维数关系) 设 P 和 $P + \text{span}\{f\}$ 在域 U^* 上非奇异, 则

(1) 如果 f 由 g_1, \dots, g_m 张成, 则 $P = R, \dim(P) = \dim(R)$;

(2) 如果 f 不由 g_1, \dots, g_m 张成, 则 $P \neq R, \dim(R) = \dim(P) + 1$ 。

证明 (1) R 退化为 P , 显然 $P = R$; (2) 只有 $f \notin P$, 故维数相差 1。

例 8.3 (不变最小分布 P, R 的生成和性质) 非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

首先, 用生成序列生成 $R = \langle f, g | \text{span}\{f, g\} \rangle$ 。取

$$\Delta_0 = \text{span}\{f(x), g(x)\}$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \text{span}\{[f, f], [f, g], [g, g]\} = \Delta_0 + \text{span}\{[f, g]\}$$

因为

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = [-e^{x_3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

所以

$$\Delta_1 = \text{span}\{f, g, [f, g]\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \text{span}\{[f, g], [f, [f, g]], [g, f], [g, [f, g]]\}$$

算得

$$\begin{aligned} [f, [f, g]] &= 0 \\ [g, [f, g]] &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$\Delta_2 = \Delta_1 \quad k^* = 1$$

结果得

$$R = \langle f, g | \text{span}\{f, g\} \rangle = \Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

其次,用生成序列生成 $P = \langle f, g | \text{span}\{g\} \rangle$ 。取

$$\Delta_0 = \text{span}\{g\}$$

$$\Delta_1 = \text{span}\{g, [f, g]\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

算得

$$\Delta_2 = \Delta_1 \quad k^* = 1$$

结果得

$$P = \langle f, g | \text{span}\{g\} \rangle = \Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

最后,研究分布 P, R 的非奇异性和对合性。 P 分布非奇异; R 分布在 x_2, x_4 同时为零时奇异,否则非奇异,3 维。分布 P, R 在各自的正则点集合上对合。

8.4.2 基于不变最小分布的局部能控性分解定理

8.4.2.1 概述

在 8.2.1 节已经基于不变分布的概念给出了能控性分解定理 8.2,本节将给出比该定理更进一步、更彻底的分解结果。本节分解定理的基础是不变最小分布概念。作为不变最小分布, R 分布和 P 分布之间的区别十分明确,其间只差一个向量场 f 。而基于不变分布的定理 8.2 做不到这一点。定理 8.2 不能排除分布 Δ 还包含 g_1, \dots, g_m 以外的向量场,也不能排除在 f, g_1, \dots, g_m 以外的向量场下不变。因为可能有其它向量场的介入,所以不能断言把向量场 f 放在分布 Δ 外和放在分布 Δ 内得到的两分布只差一个 f 。定理 8.2 不是基于最小不变分布的分解导致它不能得到更简化的分解结果。这同时也说明了进一步引入不变最小分布概念的必要性。

因为本节分解定理分解得更彻底,同时并未提出比定理 8.2 更高的假设条件,所以在一般情况下,应优先采用本定理。

8.4.2.2 R 分布比 P 分布高一维时的分解定理

定理 8.6 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (8-18a)$$

$$y_i = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq p \quad (8-18b)$$

如果分布 P 和分布 $P + \text{span}\{f\}$ 都是域 U^* 上的非奇异分布, 分布 R 也是 U^* 上非奇异分布, 分布 R 为 $d+1$ 维, 则对每点 x^0 , 总能找到邻域 U^0 和定义在 U^0 的局部坐标变换 $z = \phi(x)$, 使在新坐标下, 系统的状态方程式(8-18a)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{f}_1(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots \\ \dot{z}_d &= \bar{f}_d(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{id}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ \dot{z}_{d+1} &= \bar{f}_{d+1}(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i,d+1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ \dot{z}_{d+2} &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= 0 \end{aligned} \quad (8-19a)$$

如果把以上假设改为分布 $P = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{f, g_1, \dots, g_m\} \rangle$ 是非奇异分布, d 维, 分布 $P + \text{span}\{f\}$ 非奇异, 则对每点 x^0 , 总能找到邻域 U_0 和定义在 U_0 的局部坐标变换 $z = \phi(x)$, 使在新坐标下, 系统的状态方程式(8-18a)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{f}_1(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots \\ \dot{z}_d &= \bar{f}_d(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{id}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ \dot{z}_{d+1} &= \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n) \\ \dot{z}_{d+2} &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= 0 \end{aligned} \quad (8-19b)$$

证明 因为 P 和 $P + \text{span}\{f\}$ 都非奇异, 所以分布 R 也非奇异。由定理 5.5 知, P 和 R 都对合。因为 P 完全包含在 R 中, 所以可对每个 $x^0 \in U$, 找到一个邻域 U^0 和一个定义在 U^0 上的坐标变换 $z = \phi(x)$, 使在 U^0 上有

$$\begin{aligned} \text{span}\{d\phi_{d+1}, \dots, d\phi_n\} &= P^\perp \\ \text{span}\{d\phi_{d+2}, \dots, d\phi_n\} &= R^\perp \end{aligned}$$

对于分布 R 来说, f, g_i 都是 R 内向量场, 应按式(8-2)简化, 有

$$\begin{aligned} \bar{f}_{d+1} &= \bar{f}_{d+1}(z), \bar{f}_{d+2} = 0, \dots, \bar{f}_n = 0 \\ \bar{g}_{i,d+1} &= \bar{g}_{i,d+1}(z), \bar{g}_{i,d+2} = 0, \dots, \bar{g}_{i,n} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

结果得

$$\begin{aligned} \dot{z}_{d+2} &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= 0 \end{aligned}$$

于是式(8-19a)得证。对于分布 P 来说,考虑到 f, g_i 分别是 P 外和 P 内向量场, f 应按式(8-5)简化, g_i 应按式(8-2)简化,得

$$\dot{z}_{d+1} = \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n)$$

于是式(8-19b)得证,从而定理 8.6 得证。

与式(8-19a)相比,式(8-19b)的分解结果更进一步明确了 \bar{f}_{d+1} 与 z_1, \dots, z_d 无关和 \dot{z}_{d+1} 与 u_1, \dots, u_m 无关。

定理 8.2 和定理 8.6 都是能控性分解定理,但其分解结果有所不同。相同之处是都证明状态 z_1, \dots, z_d 是能控的和 z_{d+1}, \dots, z_n 是不能控的。不同之处是定理 8.6 还进一步指出:① z_{d+2}, \dots, z_n 都是常数,不随时间改变;②因为方程 $\dot{z}_{d+1} = \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n)$ 右端的 z_{d+2}, \dots, z_n 都是常数,所以只有 z_{d+1} 是变量,实际上可写为 $\dot{z}_{d+1} = \bar{f}_{d+1}(z_{d+1})$ 。

8.4.2.3 R 分布和 P 分布同维时的分解定理

R 分布和 P 分布都在域 U^* 上非奇异,同为 d 维的情况,即向量场 $f \in \text{span}\{g_1, \dots, g_n\}$ 和在域 U^* 上分布 $R = P$ 的情况,可以视为定理 8.6 的一个特例。对应的简化公式是

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{f}_1(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots \\ \dot{z}_d &= \bar{f}_d(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{id}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ \dot{z}_{d+1} &= 0 \\ \dot{z}_{d+2} &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= 0 \end{aligned} \quad (8-20)$$

此结果与式(8-19)不同的是 $\dot{z}_{d+1} = \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n)$ 被进一步简化为 $\dot{z}_{d+1} = 0$ 。

例 8.4 (基于不变最小分布的非线性系统的局部能控性分解)非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

首先,用生成序列生成 $P = \langle f, g | \text{span}\{g\} \rangle$ 。取

$$\Delta_0 = \text{span}\{g(x)\} \quad \Delta_1 = \Delta_0 + \text{span}\{[f, g]\}$$

因为

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = [-e^{x_3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

所以

$$\Delta_1 = \text{span}\{g, [f, g]\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \text{span}\{[g, f], [g, [f, g]]\}$$

因为算得

$$[g, [f, g]] = 0$$

所以

$$\Delta_2 = \Delta_1 \quad k^* = 1$$

结果得

$$P = \langle f, g | \text{span}\{g\} \rangle = \Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

其次,求 $P + \text{span}\{f\}$,得

$$P + \text{span}\{f\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

再次,研究分布 $P, \text{span}\{f\}$ 的非奇异性。 P 分布非奇异, $d=2$; $P + \text{span}\{f\}$ 分布在 x_2, x_4 同时为零时奇异,否则非奇异,3 维。分布 $P, \text{span}\{f\}$ 在各自的正则点集上对合。

再其次,构造坐标变换阵 $z = \phi(x)$ 。要找到 $n-d=4-2=2$ 个函数 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$, 使

$$\text{span}\{d\lambda_1, d\lambda_2\} = P^\perp = \Delta_1^\perp(x)$$

也就是说

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & e^{-x_3} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此式展开后得到

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_4} x_2 = 0 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = 0$$

由此二式得

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_4} x_2 = 0$$

据此得到二独立解

$$\lambda_1(x) = x_2 \quad \lambda_2(x) = x_4 - x_2 x_3$$

利用 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ 构造变换,取

$$\begin{aligned} z_3 &= \phi_3(x) = \lambda_1(x) = x_2 \\ z_4 &= \phi_4(x) = \lambda_2(x) = x_4 - x_2 x_3 \end{aligned}$$

补选相互独立的变换函数

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_3$$

得到变换和反变换为

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \end{bmatrix}$$

$$x = F(z) = \phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_4 + z_2 z_3 \end{bmatrix}$$

最后,做能控性分解。使向量场 $f(x), g(x)$ 作坐标变换,变化后得到

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_1 z_3 + z_2 e^{z_3} \\ z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

代回系统方程得到 z 坐标下的系统表达式

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_1 z_3 + z_2 e^{z_3} \\ z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

这就是最后的分解结果,显然状态 z_3, z_4 是不能控的。当 x_2, x_4 同时为零时,因为对应奇异点,不符合分解定理假设,所以分解定理不适用。

8.4.3 非线性系统全状态能控的分布维数条件

8.4.3.1 部分状态局部可达集

首先,考虑式(8-19a)的能控性分解结果。为方便,记分布 R 的维数为 r 。式(8-19a)的分解结果说明,从 U^0 上点 x^0 出发的状态轨线的 z_{r+1}, \dots, z_n 各坐标是始终保持不变的。如果把不同的出发点一般地记为 \bar{x} ,把 z 用 $\phi(x)$ 表示,事先把 U^0 剖分为形如式(8-21)的 r 维薄片(见图 8-1(a))

$$S_x^r = \{x \in U^0 : \phi_{r+1}(x) = \phi_{r+1}(\bar{x}), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(\bar{x})\} \quad (8-21)$$

则在 U^0 中演变的系统的轨线 $x(t)$,只能演变在通过初始点 x^0 的那个 r 维薄片 S_x^r 上(见图 8-1(b))。于是得到下面的部分状态局部可达集定理。

定理 8.7 (基于 R 分布能控分解的部分状态的 U -可达集定理) 如果分布 $R = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{f, g_1, \dots, g_m\} \rangle$ 非奇异,维数为 r ,则对每点 $x^0 \in U$ 总能找到 x^0 的邻域 U^0 和定义在 U^0 上的局部坐标变换 $z = \phi(x)$,使在新坐标下做到:

(1)由 x^0 出发,在分段不变的输入函数作用下,沿完全在 U 中的轨线,局部可达的状态

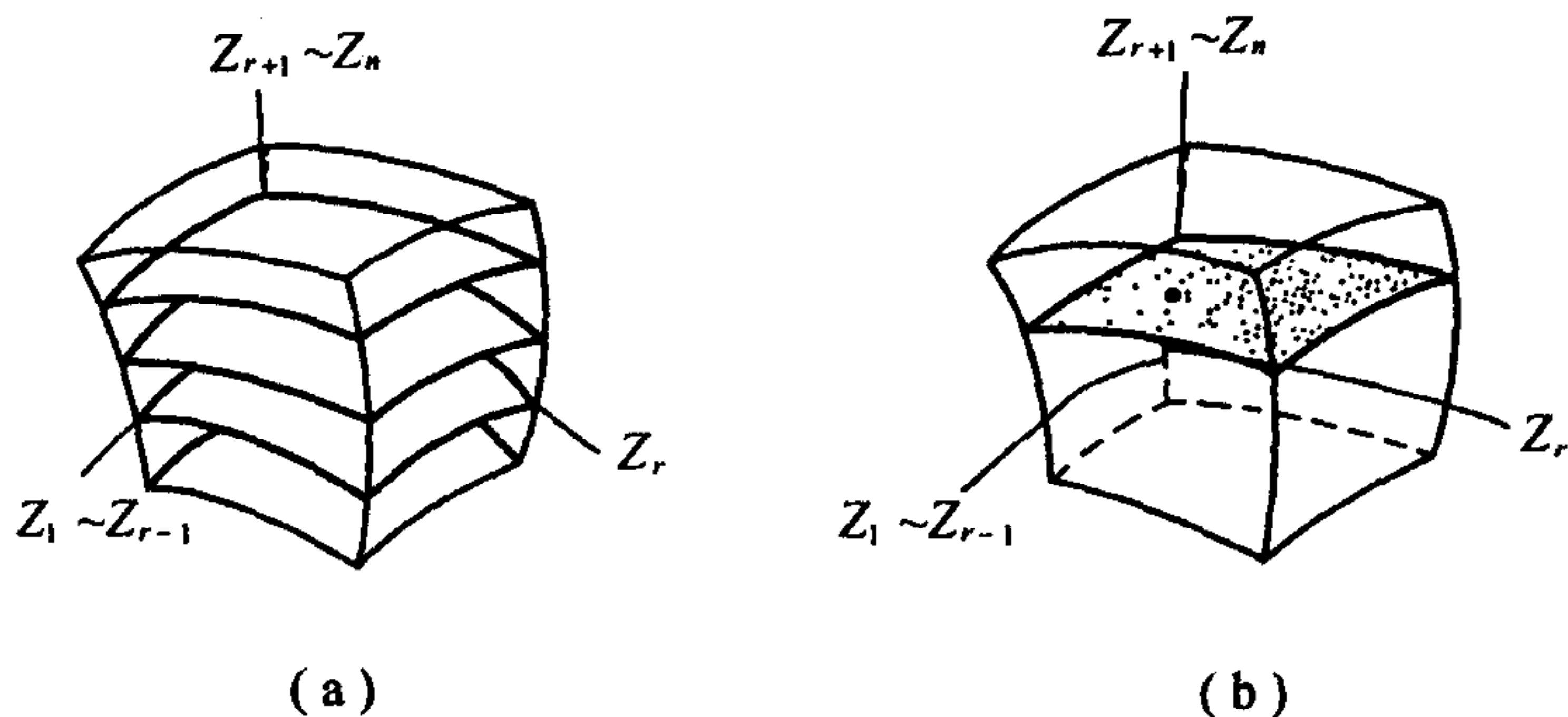


图 8-1 剖分为 r 维薄片

集 $R_{U^0}(x^0)$ 是式(8-22)所示薄片的一个子集

$$S_x^0 = \{x \in U^0 : \phi_{r+1}(x) = \phi_{r+1}(x^0), \phi_{r+2}(x) = \phi_{r+2}(x^0), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(x^0)\} \quad (8-22)$$

(2)可达集 $R_{U^0}(x^0)$ 是 S_x^0 的一个开子集。

证明 (1)的证明。由定理 8.7 前的说明自然得到该结果。(2)的证明本书从略。详细证明请读者参阅文献[1]第 69~73 页,或参阅文献[2]第 64~68 页。

其次,再考虑式(8-19b)的能控性分解结果。式(8-19b)的分解结果说明,从 U^0 上点 x^0 出发的状态轨线的 z_{d+2}, \dots, z_n 各坐标是始终保持不变的。如果把不同的出发点一般地记为 \bar{x} ,并把 z 用 $\phi(x)$ 表示,把 U^0 剖分为下列形式的 $d+1$ 维薄片:

$$S_x^{d+1} = \{x \in U^0 : \phi_{d+2}(x) = \phi_{d+2}(\bar{x}), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(\bar{x})\}$$

则在 U^0 中演变的系统的轨线 $x(t)$ 只能演变在通过初始点 x_0 的那个 $d+1$ 维薄片 S_x^{d+1} 上。

再进一步考虑方程 $\dot{z}_{d+1} = \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n)$ 。因为 z_{d+2}, \dots, z_n 为常数,所以方程可简化为 $\dot{z}_{d+1} = \bar{f}_{d+1}(z_{d+1})$ 。这是一个一阶非线性方程,其解 $z_{d+1}(t)$ 表现了系统解轨线一个坐标的运动。系统状态轨线随时间在片 S_x^{d+1} 上演变,不同时刻将达到不同的位置。每个时刻 T 所能到达的位置都对应着片 S_x^{d+1} 片的一个子集。从剖分的观点看,这是按时刻对片 S_x^{d+1} 所进行的进一步细剖分。剖分后得到 d 维片

$$S_{x,T}^{d,0} = \{x \in U^0 : \phi_{d+1}(x) = \phi_{d+1}(\phi_T'(x^0)), \phi_{d+2}(x) = \phi_{d+2}(x^0), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(x^0)\} \quad (8-23)$$

以上分析表明,在一定条件下,坐标 z_{d+1} 可以被借用作时间坐标来分析状态到达点。

下面是与此相应的部分状态局部可达集的定理。

定理 8.8 (基于 P 分布能控分解的部分状态的 U -可达集定理)如果分布 $P =$

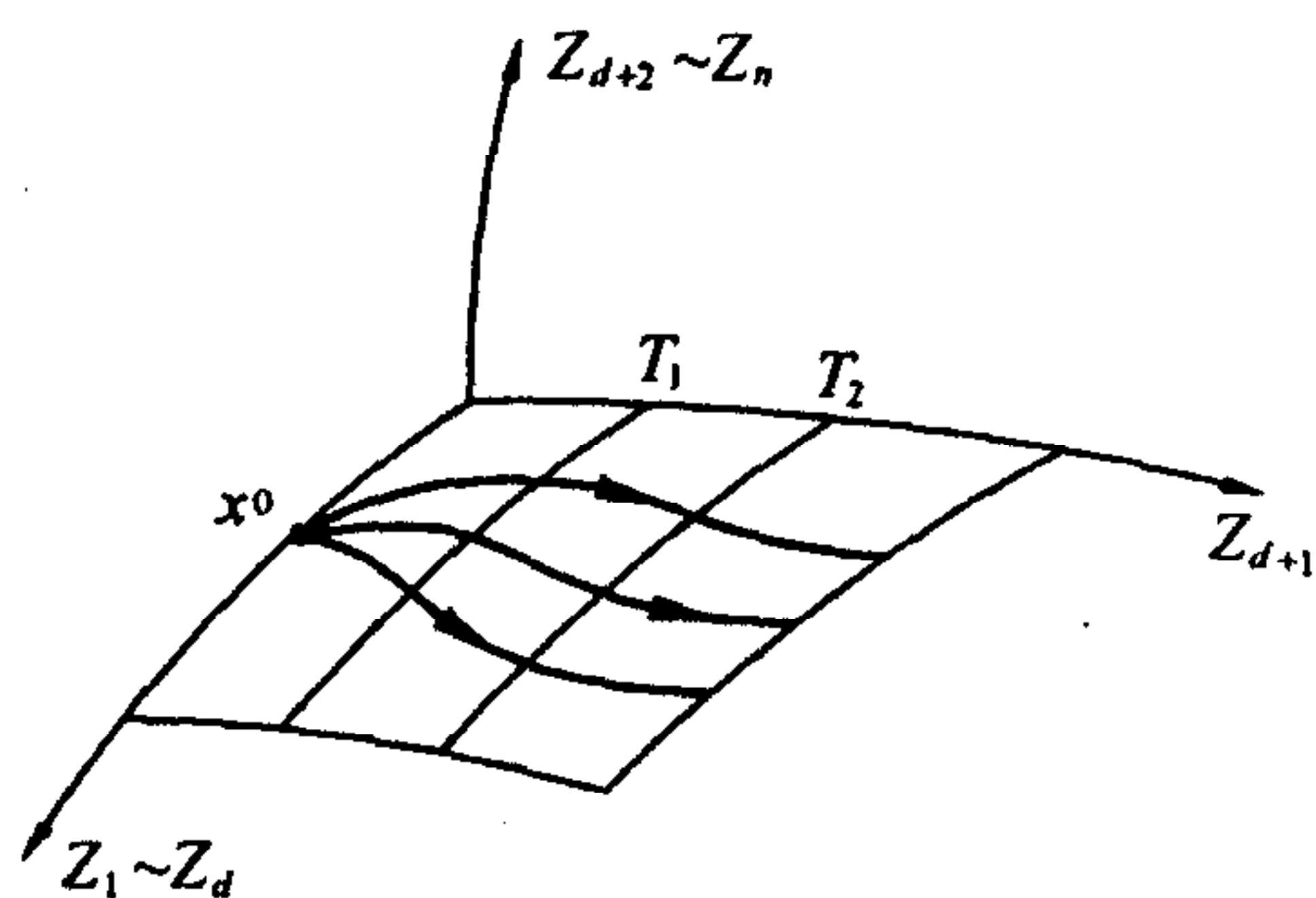


图 8-2 剖分为 $d+1$ 维薄片

$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \rangle$ 和 $P + \text{span}\{f\}$ 非奇异, 分布 P 维数为 d , 则对每点 $x^0 \in U$, 总能找到 x^0 的邻域 U^0 和定义在 U^0 上的局部坐标变换 $z = \phi(x)$, 使在新坐标下做到:

(1) 在 $t=0$ 由 x^0 出发, 在分段不变的输入函数作用下, 沿完全在 U 中的轨线, 在 $t=T$ 可达的状态集 $R_{U^0}(x^0, T)$ 是下片的一个子集

$$\begin{aligned} S_{x^0, T}^d &= \{x \in U^0 : \phi_{d+1}(x) = \phi_{d+1}(\phi_T^f(x^0)), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(\phi_T^f(x^0))\} \\ &= \{x \in U^0 : \phi_{d+1}(x) = \phi_{d+1}(\phi_T^f(x^0)), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(x^0)\} \end{aligned} \quad (8-24)$$

式中, $\phi_T^f(x^0)$ 表示对所有 $t \in [0, T]$, 取输入 $u(t) = 0$ 时, 在时刻 T 可达的状态。

(2) 可达集 $R_{U^0}(x^0, T)$ 是 $S_{x^0, T}^d$ 的一个开子集。

证明 (1) 的证明。由定理 8.8 前的说明自然得到该结果。(2) 的证明本书从略。详细证明请读者参阅文献[1]第 74 页, 或参阅文献[2]第 68~69 页。

8.4.3.2 全状态能控的分布维数条件

定理 8.9 如果分布 P 和 $P + \text{span}\{f\}$ 在域 U^* 上非奇异, 分布 P 的维数等于 n , n 是系统的维数, 则对每点 $x^0 \in U$, 总能找到 x^0 的邻域 U_0 和定义在 U_0 上的局部坐标变换 $z = \phi(x)$, 使在新坐标下得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m g_{i1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8-25)$$

$$\dot{z}_n = f_n(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m g_{in}(z_1, \dots, z_n) u_i$$

即系统全状态能控的充分条件是分布 P 的维数满足

$$\dim(P) = n \quad (8-26)$$

证明 引用定理 8.6 即得证。

对于线性定常系统, 有

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m B_i u_i$$

式(8-26)可写为

$$\begin{aligned} \dim(P) &= \dim(\langle Ax, B_1, \dots, B_m | \text{span}\{B_1, \dots, B_m\} \rangle) \\ &= \dim(\text{span}\{B_1, \dots, B_m, AB_1, \dots, AB_m, \dots, A^{n-1}B_1, \dots, A^{n-1}B_m\}) \\ &= \text{rank}[B : AB : \dots : A^{n-1}B] = n \end{aligned}$$

式中, $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ 的每一个都是 $n \times m$ 维矩阵。它们拼接成一个 $n \times nm$ 维矩阵。可见, 此处的系统全状态能控条件与多输入定常线性系统的完全能控性秩条件

$$\text{rank}[B : AB : \dots : A^{n-1}B] = n \quad (8-27)$$

相对应。

8.5 控制系统的不变最小对偶分布和局部能观性分解定理

8.5.1 控制系统的不变最小对偶分布和不变最大分布

8.5.1.1 不变最小对偶分布

定义 8.2 针对非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (8-28a)$$

$$y = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq p \quad (8-28b)$$

定义一个不变最小对偶分布

$$Q^\perp = \langle f, g_1, \dots, g_m \mid \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \rangle$$

Q^\perp 被称为包含 $\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$, 在 f, g_1, \dots, g_m 下不变的最小对偶分布。

8.5.1.2 不变最大分布

定义 8.3 分布

$$Q = \langle f, g_1, \dots, g_m \mid \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \rangle^\perp \quad (8-29)$$

被称为在 f, g_1, \dots, g_m 下不变, 被包含在 $(\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\})^\perp$ 中的最大分布 (maximal distribution which is contained in $(\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\})^\perp$ and is invariant under the vector field f, g_1, \dots, g_m), 简称 Q 分布 (distribution Q)。

例 8.5 (不变最小对偶分布生成, Q 分布) 考虑非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad h(x) = x_3$$

首先, 用生成序列生成 $Q^\perp = \langle f, g \mid \text{span}\{dh\} \rangle$ 。取

$$Q_0^\perp = \text{span}\{dh(x)\} = \text{span}\{(0 \ 0 \ 1 \ 0)\}$$

$$Q_1^\perp = Q_0^\perp + \text{span}\{L_f dh, L_g dh\}$$

因为

$$\begin{aligned} L_f dh &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (dh) f \right)^\top + dh \frac{\partial f}{\partial x^\top} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x^\top} f \right)^\top + \frac{\partial h}{\partial x^\top} \frac{\partial f}{\partial x^\top} = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \\ L_g dh &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (dh) g \right)^\top + dh \frac{\partial g}{\partial x^\top} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x^T} g \right)^T + \frac{\partial h}{\partial x^T} \frac{\partial g}{\partial x^T} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

所以

$$\begin{aligned} Q_1^\perp &= Q_0^\perp + \text{span}\{L_f dh, L_g dh\} = \text{span}\{dh, L_f dh\} \\ &= \text{span}\{(0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0)\} \\ Q_2^\perp &= Q_1^\perp + \text{span}\{L_f^2 dh, L_g dh, L_f^2 dh, L_g L_f dh\} \end{aligned}$$

算得

$$L_f^2 dh = 0 \quad L_g L_f dh = 0$$

所以

$$Q_2^\perp = Q_1^\perp \quad k^* = 1$$

结果得

$$\begin{aligned} Q^\perp &= \langle f, g | \text{span}\{dh\} \rangle = \text{span}\{dh, L_f dh\} \\ &= \text{span}\{(0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0)\} \end{aligned}$$

根据正交对偶关系可得到

$$Q = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

最后,研究分布 Q 的非奇异性和对合性。观察可知,分布 Q 非奇异,2 维。按对合定义,经简单计算后知 Q 对合。

8.5.2 基于不变最小对偶分布的局部能观性分解定理

8.5.2.1 概述

在 8.3.1 节已经基于不变对偶分布的概念给出了能观性分解定理 8.3,本节将给出比该定理更进一步、更彻底的分解结果。本节分解定理的基础是不变最小对偶分布概念。定理 8.3 不能排除对偶分布 Ω 还包含 dh_1, \dots, dh_p 以外的对偶向量场,也不能排除在 f, g_1, \dots, g_m 以外的向量场下不变。导致此结果的根本原因是定理 8.3 不是基于最小不变分布下的分解。从概念上说,因为本节分解定理分解得更彻底,同时,并未提出比定理 8.3 更高的假设条件,所以在一般情况下,应优先采用本定理。但就实际问题来说,如果既无 dh_1, \dots, dh_p 以外的对偶向量场,也无 f, g_1, \dots, g_m 以外的向量场,则定理 8.3 和定理 8.10 得到的分解结果实际上是一样的,实际上可以使用其中任何一种方法。

8.5.2.2 Q 分布的分解定理

定理 8.10 考虑系统式(8-28),如果分布 $Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \rangle^\perp$ 是非奇异分布, s 维,则对每点 x^0 ,总可找到邻域 U_0 和定义在 U_0 的局部坐标变换 $z = \phi(x)$,使在新坐标下,系统式(8-28)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{f}_1(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots \\ \dot{z}_s &= \bar{f}_s(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{is}(z_1, \dots, z_n) u_i \end{aligned} \tag{8-30a}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{s+1} &= \bar{f}_{s+1}(z_{s+1}, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i,s+1}(z_{s+1}, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots\end{aligned}\quad (8-30b)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= \bar{f}_n(z_{s+1}, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{in}(z_{s+1}, \dots, z_n) u_i \\ y_i &= h_i(z_{s+1}, \dots, z_n) \quad 1 \leq i \leq p\end{aligned}\quad (8-30c)$$

证明 本定理中 Q, s 分别与定理 8.3 中的 Δ, d 相当。因为 Q 非奇异, 由定理 5.5 知, Q 对合。因为 Q^\perp 在 f, g_1, \dots, g_m 下不变, 由定理 4.2 知, Q 也在 f, g_1, \dots, g_m 下不变。因为满足定理 8.3 各条件, 引用定理 8.3 可得与式(8-15)一样的式(8-30), 于是定理得证。

例 8.6 (基于不变最小分布的非线性系统的局部能观性分解)考虑非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad h(x) = x_3$$

首先, 用生成序列生成 $Q^\perp = \langle f, g | \text{span}\{dh\} \rangle$ 。取
 $Q_0^\perp = \text{span}\{dh(x)\}$

扩充为

$$Q_1^\perp = Q_0^\perp + \text{span}\{L_f dh\} + \text{span}\{L_g dh\}$$

引用例 8.5 的结果得

$$\begin{aligned}Q_1^\perp(x) &= \text{span}\{dh, L_f dh\} = \text{span}\{[0 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 0 \ 0]\} \\ Q_2^\perp &= Q_1^\perp\end{aligned}$$

结果得

$$\begin{aligned}Q^\perp &= \langle f, g | \text{span}\{dh\} \rangle = \text{span}\{dh, L_f dh\} \\ &= \text{span}\{(0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0)\}\end{aligned}$$

根据正交对偶关系可得到

$$Q = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

其次, 研究分布 Q 的非奇异性。 Q 分布非奇异。

再次, 构造坐标变换阵 $z = \phi(x)$ 。要找到 $n - d = 4 - 2 = 2$ 个函数 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$, 使
 $\text{span}\{d\lambda_1, d\lambda_2\} = Q^\perp$

也就是说

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此式展开后得到

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_4} = 0$$

据此得到二独立解

$$\lambda_1(x) = x_3 \quad \lambda_2(x) = x_2$$

利用 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ 构造变换, 取

$$z_3 = \phi_3(x) = \lambda_1(x) = x_3$$

$$z_4 = \phi_4(x) = \lambda_2(x) = x_2$$

补选相互独立的变换函数

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_4$$

得到变换和反变换为

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x = F(z) = \phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

最后, 作不能区分性分解。使向量场 $f(x), g(x)$ 作坐标变换, 变化后得到

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_3 e^{x_3} \\ x_2^2 + x_3 x_4 - x_3^2 x_2 \\ x_2 \\ -x_2 x_3 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 z_4 + z_3 e^{z_3} \\ z_4^2 + z_2 z_3 - z_3^2 z_4 \\ z_4 \\ -z_3 z_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

使函数 $h(x)$ 作坐标变换, 变化后得到

$$\bar{h}(z) = h(x)_{x=\phi^{-1}(z)} = z_3$$

代入变换后的系统方程, 得到 z 坐标下的系统表达式

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_1 z_4 + z_3 e^{z_3} \\ z_4^2 + z_2 z_3 - z_3^2 z_4 \\ z_4 \\ -z_3 z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = z_3$$

这也就是最后的分解结果。显然, 输出 y 不受 z_1, z_2 影响, z_1, z_2 是不能区分的。

8.5.3 非线性系统全状态能观的分布维数条件

8.5.3.1 部分状态局部不可区分点集

式(8-30)的分解结果说明,在 U^0 上,状态轨线的 z_1, \dots, z_s 坐标不影响输出 y_1, \dots, y_p ,只有 z_{s+1}, \dots, z_n 影响输出。如果把 z 用 $\phi(x)$ 表示,把 U^0 按不同的初始点 \bar{x} 剖分为下列形式的 $n-s$ 维薄片

$$S_x^{n-s} = \{x \in U^0 : \phi_{s+1}(x) = \phi_{s+1}(\bar{x}), \dots, \phi_n(x) = \phi_n(\bar{x})\} \quad (8-31)$$

则在同一个 $n-s$ 维薄片 S_x^{n-s} 上演变的系统的轨线 $x(t)$ 将不影响输出。

下面是关于部分状态局部不可区分点集的定理。

定理 8.11 如果分布 $Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}^\perp$ 非奇异,分布 Q 维数为 s ,则对每点 $x^0 \in U$ 总能找到 x^0 的邻域 U^0 和定义在 U^0 上的局部坐标变换 $z = \phi(x)$,使在新坐标下做到:

(1) U^0 中任二初始状态 x^a, x^b ,如满足

$$\phi_i(x^a) = \phi_i(x^b) \quad i = s+1, \dots, n$$

则在任何一个可保持状态轨线在 U^0 上演变的输入下,将产生同样的输出。

(2) U^0 中在分段不变输入函数作用下,与 x^0 不能区分的任何初始状态都属于片

$$S_{x^0}^s = \{x \in U^0 : \phi_i(x) = \phi_i(x^0), s+1 \leq i \leq n\}$$

证明 (1)的证明。由定理 8.11 前的说明自然得到该结果。(2)的证明本书从略。详细证明请读者参阅文献[1]第 78~81 页,或参阅文献[2]第 73~76 页。

8.5.3.2 全状态能观的分布维数条件

定理 8.12 如果分布 $Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}^\perp$ 非奇异,分布 Q 的维数为 s ,则对每点 $x^0 \in U$,总能找到 x^0 的邻域 U_0 和定义在 U_0 上的局部坐标变换 $z = \phi(x)$,使在新坐标下,得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{f}_1(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i,1}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8-32a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_{i,n}(z_1, \dots, z_n) u_i \\ y_i &= h_i(z_1, \dots, z_n) \quad 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (8-32b)$$

即系统全状态能观的条件是,分布 Q 的维数满足

$$\dim(Q) = 0 \quad (8-33)$$

对于线性定常系统,式(8-33)可写为

$$\begin{aligned} \dim(Q) &= \dim(\langle Ax, B_1, \dots, B_m | \text{span}\{C_1, \dots, C_p\}^\perp) \\ &= \dim(\text{span}\{C_1, \dots, C_p, C_1 A, \dots, C_p A, \dots, C_1 A^{n-1}, \dots, C_p A^{n-1}\}^\perp) \\ &= n - \text{rank}[C^T : A^T C^T : \dots : (A^{n-1})^T C^T] = 0 \end{aligned}$$

可见,此处的系统全状态能观条件与线性定常系统的完全能观性秩条件

$$\text{rank}[C^T : A^T C^T : \dots : (A^{n-1})^T C^T] = n$$

相对应。

第9章 控制系统的全局分解

前一章在非奇异和对合假设下实现了控制系统的局部分解,通过把状态空间局部地剖分为较低维子流形,清楚地表明了输入-状态间和状态-输出间的相互作用关系。这里特别强调,读者一定要注意到,这一分解除要求分布对合外,还要求分布满足非奇异的假设条件,即要求分布的维数在所讨论点的邻域上保持不变。

本章将讨论全局分解和全局剖分,介绍一种全局适用的分解和剖分方法。因为要想把分解从局部推广到全局只有把假设条件进一步放宽才有可能,所以必须对对合和非奇异二假设有所取舍。经认真分析后作出的合理的选择是,只保留分布对合假设而放弃非奇异假设。本章最终在对合假设下实现了全局分解。全局分解将把所讨论的状态空间从流形 N 的开集 U 扩大为一般的流形 N 。反过来,局部分解可视为全局分解取 $N=U$ 的一个特例。

本章开头一节给出了最大积分子流形概念,给出了分布有最大积分子流形特性的充要条件——Sussmann 定理,此外还基于局部有限(个基底)生成的向量场集合概念给出了分布有最大积分子流形特性的充分条件。9.2 节和 9.3 节讨论了控制系统的全局能控性分解问题。为解决不变最小分布因在奇异点上常失去不变性而不能用于全局分解的问题,用与最小子代数相当的分布(专用于控制系统时,称与控制子代数相当的最小分布)代替不变最小分布,实现了全局能控分解。9.4 节和 9.5 节讨论控制系统的全局能观性分解问题。为解决不变最小对偶分布因在奇异点上常失去不变性而不能用于全局分解的问题,用与最小子空间相当的对偶分布(专用于控制系统时称与观察空间相当的最小分布)代替不变最小对偶分布,实现了全局能观分解。

9.1 最大积分子流形

9.1.1 最大积分子流形的定义

在定义之前,让我们重温一下分布的定义,并注意一个维数关系。分布给每点 $p \in N$ 指定了一个 Δ_p ,所指定的 $\Delta_p \in T_p N$,是 N 上 p 点切空间 $T_p N$ 的某个子空间。按这一定义, Δ_p 最高可能的维数等于 N 的维数,也就是 $T_p N$ 的维数。如果 S 是 N 的一个子流形,包含 p 点, S 上 p 点切空间表示为 $T_p S$,则 Δ_p 的维数可能高于、等于或低于 S 的维数(即 $T_p S$ 的维数)。我们特别关注两者相等的情况,并给出如下的定义。

定义 9.1 设 Δ 是定义在流形 N 上的一个分布, S 是 N 的一个低维或同维子流形。如果任意点 $p \in S$ 处的切空间 $T_p S$ 与作为 $T_p N$ 的子空间的 Δ_p 相一致,则称 S 是分布 Δ 的一个积分子流形(integral submanifold)。

按此定义,在一个积分子流形上,切空间 $T_p S$ 的每个切向量都属于 $T_p N$ 的子空间 Δ_p ,

反之, $T_p N$ 的子空间 Δ_p 中的每个切向量都属于切空间 $T_p S$ 。另外, 由定义可知, 积分子流形因分布 Δ 而异, 分布不同, 对应的积分子流形一般也不同。

定义 9.2 设 S 是分布 Δ 的一个连通的积分子流形。如果分布 Δ 的所有其它含 S 的连通积分子流形均与 S 的部分或全体相重合, 则称 S 为 Δ 的一个**最大积分子流形**(maximal integral submanifold)。

按此定义, 通过一点 $p \in N$ 的 Δ 的任意二最大积分子流形必定重合。

定义 9.3 N 上一分布 Δ 有**最大积分子流形特性**(maximal integral submanifolds property), 是指每点 $p \in N$ 都有 Δ 的一个最大积分子流形通过, 也就是说, 存在一剖分把 N 剖成 Δ 的一些最大积分子流形。

按此定义, 随 p 点位置不同, 一般有不同的最大积分子流形。

例 9.1 (分布在奇异点上有积分子流形) 取 $N = R^2$, N 上的分布 Δ 定义为

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \text{span}\{\tau_1, \tau_2\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_x, \lambda(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x\right\} \\ &= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda(x_1) \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

式中, $\lambda(x_1)$ 是一 C^∞ 函数, 其函数表达式是

$$\begin{cases} \lambda(x_1) = 0 & x_1 \leq 0 \\ \lambda(x_1) > 0 & x_1 > 0 \end{cases}$$

因为

$$[\tau_1, \tau_2] = \frac{\partial \tau_2}{\partial x^T} \tau_1 - \frac{\partial \tau_1}{\partial x^T} \tau_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(x_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Delta$$

可见分布在全 $N = R^2$ 上是对合的。因为

$$\dim \Delta(x) = \begin{cases} 1 & x_1 \leq 0 \\ 2 & x_1 > 0 \end{cases}$$

所以知分布 Δ 在 $x_1 = 0$ 线上奇异。下面研究分布 Δ 的最大积分子流形特性。首先, 对二维区, N 的开子集 $S_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 > 0\}$, 即右半开平面, 是 N 的同维子流形。 S_2 上任一点 p 处属于 $T_p S_2$ 的切向量(即 $T_p N$ 的切向量)都在 Δ 内, 反之, Δ 中向量场在 p 点切向量也都在 S_2 上 p 点切平面内。因此, S_2 是一个积分子流形。按定义, S_2 也是一个最大积分子流形。其次, 对一维区, $S_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 < 0, x_1 = c\}$, 即左半开平面中的垂直开线, 是 N 的低维子流形。在 S_1 上的分布 $\Delta_p = \text{span}\{\tau_1\}$ 。 $T_p S_1$ 中切向量都属于 Δ_p 。因此, S_1 也是一个积分子流形和最大积分子流形。最后, 奇异点集 $S_3 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = 0\}$, 即纵轴, 是 N 的低维子流形。在 S_3 上的分布 $\Delta_p = \text{span}\{\tau_1\}$, 而 $T_p S_3$ 中的切向量是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \Delta_p = \text{span}\{\tau_1\} = \text{span}\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$$

因此, S_3 也是一个积分子流形和最大积分子流形。结论是分布 Δ 具有最大积分子流形特性。

9.1.2 最大积分子流形的性质

性质 1 (轨线在某一最大积分子流形上运动) 若点 p 属于 Δ 的一个最大积分子流形,

向量场 $\theta \in \Delta$, 则对所有 T , 随 T 运动的点 $q = \phi_T^\theta(p)$ 属于 Δ 的同一最大积分流形, 即轨线在某一最大积分流形上运动。

证明 首先证明 q 在 Δ 的一个积分流形上。设 S 是通过点 p 的最大积分流形, τ 和 θ 是 Δ 中向量场。对足够小的 ϵ , 映射

$$\begin{aligned}\sigma: (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow N \\ \sigma(t) &= \phi_T^\theta \circ \phi_t^\tau \circ \phi_{-T}^\theta(p)\end{aligned}\quad (9-1)$$

定义了 N 上一光滑轨线。在 τ, θ 二向量场作用下, $t=0$ 时刻通过点 p 的一条光滑轨线。下面求此轨线在 t 时刻的切向量。

令 $w = \phi_t^\tau \circ \phi_{-T}^\theta(p)$, $q = \phi_T^\theta(w) = \phi_T^\theta \circ \phi_t^\tau \circ \phi_{-T}^\theta(p) = \sigma(t)$ 。轨线在时刻 $-T+t$ 到达点 w 。点 w 经映射 ϕ_T^θ 在时刻 t 到达点 q , 同时点 w 处的切向量 $\tau(w)$ 经映射 ϕ_T^θ 得到点 q 的像 $(\phi_T^\theta)_* \tau(w)$ 。它也是切向量 $(d/dt)_t$ 经映射 σ 得到的像(曲线在时刻 t 的切向量)。于是得轨线在时刻 t 的切向量, 为

$$\begin{aligned}\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t &= (\phi_T^\theta)_* \tau(w) = (\phi_T^\theta)_* \tau(\phi_t^\tau \circ \phi_{-T}^\theta(p)) = (\phi_T^\theta)_* \tau(\phi_{-T}^\theta(q)) \\ &= (\phi_T^\theta)_* \tau(\phi_{-T}^\theta(\sigma(t)))\end{aligned}$$

按切向量映射定义, 得

$$\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t = \tau(\phi_T^\theta(w)) = \tau(\phi_T^\theta \circ \phi_t^\tau \circ \phi_{-T}^\theta(p)) = \tau(q) = \tau(\sigma(t))$$

因为 $\tau(q) \in \Delta(q)$, 所以对所有 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, 有

$$\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t \in \Delta(\sigma(t))$$

根据最大积分流形定义, 这表明光滑轨线 σ (包括点 q) 处于 Δ 的一个积分流形上。

其次, 证明该子流形是过点 p 的积分流形。因为点 p 在该光滑曲线 σ 上, 所以轨线 (包括点 q) 与点 p 是在同一最大积分流形上。证毕。

性质 2 (属于 Δ 的同一最大积分流形的两点, 在任一时刻属于 Δ 的同一最大积分流形) 若 p_1, p_2 是属于 Δ 的同一最大积分流形的两点, 则对所有 T , $\phi_T^\theta(p_1), \phi_T^\theta(p_2)$ 属于 Δ 的同一最大积分流形。

事实上, 由性质 1, 这是显然的。

性质 3 (包含 N 上所有能表达为 $\phi_{t_k}^{\tau_k} \circ \phi_{t_{k-1}}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_1^{\tau_1}(p)$ 形式的点) 设 p 是 N 上的一点, S 是 Δ 的通过点 p 的一个积分流形。 Δ 由向量场 τ_1, \dots, τ_k 张成, $\phi_{t_1}^{\tau_1}, \dots, \phi_{t_k}^{\tau_k}$ 是相应的流, 则 S 应当包含 N 上所有能表达为以下形式的点

$$\phi_{t_k}^{\tau_k} \circ \phi_{t_{k-1}}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_1^{\tau_1}(p) \quad (9-1)$$

事实上, 按积分流形的定义, 对所有有定义的 t_i 值, $\phi_{t_i}^{\tau_i}(p)$ 应当是 S 的一点。因此, 积分流形 S 包含 N 上所有能表达为 $\phi_{t_k}^{\tau_k} \circ \phi_{t_{k-1}}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_1^{\tau_1}(p)$ 形式的点。

性质 4 (任意两点 p, q 间都可表示为 $q = \phi_{t_1}^{\tau_1} \circ \cdots \circ \phi_{t_k}^{\tau_k}(p)$) 设 Δ 是一个分布, 有最大积分流形特性, 又设 S 是 Δ 的一个最大积分流形, 则给定 S 中任意两点 p 和 q , 存在 Δ 中的向量场 τ_1, \dots, τ_k 和实数 t_1, \dots, t_k , 使 $q = \phi_{t_1}^{\tau_1} \circ \cdots \circ \phi_{t_k}^{\tau_k}(p)$ 。

9.1.3 分布有最大积分子流形特性的必要条件

引理 9.1 分布有最大积分子流形特性的必要条件是对合。

证明 如果分布 Δ 具有最大积分子流形特性, τ 是分布 Δ 的一个向量场, 则 τ 必定切到 Δ 的每个最大积分子流形 S 。设 τ_1, τ_2 分别属于 Δ , 它们分别切到 Δ 的每个最大积分子流形 S 。 $[\tau_1, \tau_2]$ 只有与 τ_1, τ_2 同属一个 Δ 才能切到 Δ 的每个最大积分子流形 S , 因此 $[\tau_1, \tau_2]$ 必须属于 Δ 。

这证明了对合是分布 Δ 具有最大积分子流形特性的必要条件。但是, 与对合同时是完全可积的充分条件的情况不同, 对合并不是具有最大积分子流形特性的充分条件。在下面的例子中, 分布对合, 但不具有最大积分子流形特性。

例 9.2 (分布对合, 但在分布奇异点上找不到积分子流形) 取 $N = R^2$, N 上的分布 Δ 定义为

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \text{span}\{\tau_1, \tau_2\} = \text{span}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_x, \lambda(x_1)\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_x\right\} \\ &= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda(x_1) \end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

式中 $\lambda(x_1)$ 是一 C^∞ 函数, 其函数表达式是

$$\begin{aligned}\lambda(x_1) &= 0 & x_1 \leq 0 \\ \lambda(x_1) &> 0 & x_1 > 0\end{aligned}$$

因为

$$[\tau_1, \tau_2] = \frac{\partial \tau_2}{\partial x} \tau_1 - \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d\lambda}{dx_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \end{bmatrix} \in \Delta$$

可见分布在全 $N = R^2$ 上是对合的。因为

$$\dim \Delta(x) = \begin{cases} 1 & x_1 \leq 0 \\ 2 & x_1 > 0 \end{cases}$$

所以, 知分布 Δ 在 $x_1 = 0$ 线上奇异。下面研究分布 Δ 的最大积分子流形特性。首先, 对二维区, N 的开子集 $S_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 > 0\}$, 即右半开平面, 是 N 的同维子流形。与例 9.1 做同样的分析知, S_2 是一个积分子流形, 也是一个最大积分子流形。其次, 对一维区, $S_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 < 0, x_2 = c\}$, 即左半开平面中的水平开线, 是 N 的低维子流形。在 S_1 上的分布 $\Delta_p = \text{span}\{\tau_1\}$, $T_p S_1$ 中切向量都属于 Δ_p 。因此, S_1 也是一个积分子流形和最大积分子流形。最后, 对奇异点集 $S_3 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = 0\}$, 即纵轴, 是 N 的低维子流形。在 S_3 上的分布 $\Delta_p = \text{span}\{\tau_1\}$, 而 $T_p S_3$ 中的切向量是 $[0 \ 1]^T \notin \Delta_p = [1 \ 0]^T$ 。因此 S_3 不是积分子流形。结论是, 分布 Δ 找不到过 $(0, c)$ 点的积分子流形, 分布 Δ 不具有最大积分子流形特性。

9.1.4 最大积分子流形的全局剖分是浸入子流形

在定理 8.7 的证明中已经指出, 由一个非奇异、完全可积分布导出的局部剖分片, 是一些嵌入子流形, 它们和原像有微分同胚关系, 即有彼此空间同维且点对应的双射关系。本

小节将指出,最大积分子流形导出的全局剖分不具有这样的性质。所导出的一些剖分片,一般不是嵌入子流形,而是浸入子流形,即剖分片和原像彼此空间同维,但不存在确定的点点对应关系。让我们通过一个例子来说明这一性质。

例 9.3 (最大积分子流形全局剖分是浸入子流形)作为流形 $T_2 = S_1 \times S_1$, 考虑一个轮胎环面。它联合了两个相类似的状态平面 S_1 。第一个 S_1 代表轮胎的一个横剖面,是由过轮胎轴的半平面与轮胎面相交得到的一个圆。相应的状态平面原点取在圆心。设 τ 是此状态平面 R^2 上定义的向量场

$$\tau(x_1, x_2) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_x$$

它在圆上每点 $(x_1, x_2) \in S_1$ 上指定一个 $T_{(x_1, x_2)} S_1$ 中的切向量。在向量场 τ 作用下的流为

$$\phi_t^{\tau}(x_1^0, x_2^0) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_1^0 \cos t - x_2^0 \sin t, x_1^0 \sin t + x_2^0 \cos t)$$

为表达简单明了,用复数表示。圆上一点 (x_1, x_2) 可表示为 $z = x_1 + jx_2, |z| = 1$ 。流可表示为 $\phi_t^{\tau}(z) = e^{jt}z$ 。第二个 S_1 代表轮胎面的环形轴线圆平面。状态平面原点也取在圆心。设 θ 是此状态平面 R^2 上定义的向量场

$$\theta(x_1, x_2) = -x_2 \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + x_1 \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_x$$

式中 α 是一个参数。如用复数表示,圆上一点 (x_1, x_2) 可表示为 $z = x_1 + jx_2, |z| = 1$ 。在向量场 θ 作用下的流可表示为 $\phi_t^{\theta}(z) = e^{j\alpha t}z$ 。

我们可联合向量场 τ 和 θ , 在 T_2 上定义一个向量场

$$f(z_1, z_2) = (\tau(z_1), \theta(z_2))$$

向量场 f 作用下的流可表示为

$$\phi_t^f(z_1, z_2) = (e^{jt}z_1, e^{j\alpha t}z_2)$$

状态轨线是绕在轮胎面上的螺线。螺线是否有周期性和参数 α 的取值有关。如果 α 是有理数,则对所有 $t \in R$, 所有整数 $k \in z$, 存在一个周期 T , 使 $\phi_t^f = \phi_{t+kT}^f$ 。反之,如果 α 是无理数,则无周期性,不存在确定的点点对应关系。对每个固定的点 $p = (z_1, z_2) \in T_2$, 映射 $F_p: t \rightarrow \phi_t^f(z_1, z_2)$ 是 R 向 T_2 的一个单射, $F_p(R)$ 是 T_2 的一个浸入子流形。

今定义一个一维分布 $\Delta = \text{span}\{f\}$, 求通过一点 p 的最大积分子流形。当 α 是无理数时,最大积分子流形 S 正是 $F_p(R)$ 。因此, Δ 具有最大积分子流形特性。 $F_p(R)$ 是 T_2 的一个浸入子流形,而不是嵌入子流形,这是因为无法得到相应的剖分片,从而建立确定的点点对应关系。为确认这个事实,我们在 T_2 上选任意点 $p \in T_2$ 和 p 的任意开邻域 U 。实际上, $F_p(R)$ 在 U 上是无处不在的,即交 $F_p(R) \cap U$ 在 U 中是稠密的。 $F_p(R) \cap U$ 不可能只在 U 的一片上。

9.1.5 分布有最大积分子流形特性的充要条件

9.1.5.1 Sussmann 定理

定理 9.2 (Sussmann 定理) 设 p 是流形 N 上的任意点, Δ 是全流形 N 上有定义的分布, S 是分布 Δ 通过点 p 的积分子流形。分布 Δ 有最大积分子流形特性的充要条件是,在 S 上,对定义流 $\phi_t^f(p)$ 用到的每个向量场 $\tau \in \Delta$ 和每对 $(t, p) \in R \times N$, 向量场映射

$(\phi_t^r)_* : T_p N \rightarrow T_{\phi_t^r(p)} N$ 能把点 p 的子空间 $\Delta(p)$ 映射到同一 S 上的点 $\phi_t^r(p)$ 的子空间 $\Delta(\phi_t^r(p))$ 内。

此定理的充要条件内容可简单地概括为:切向量的流映射 $(\phi_t^r)_*$ 能把 p 点切空间 $\Delta(p)$ 映入 p 点流映射映像点 $\phi_t^r(p)$ 处的切空间 $\Delta(\phi_t^r(p))$ 内,即

$$(\phi_{t_1}^r)_* \Delta(p) \in \Delta(\phi_{t_1}^r(p)) \quad (9-2)$$

定理的证明可以在文献里查到,本书从略。只对其必要性部分做一些说明。由最大积分流形性质 1 和 3, 设 p 是 N 上的一点, S 是 Δ 通过点 p 的一个积分流形。 Δ 由向量场 τ_1, \dots, τ_k 张成, $\phi_{t_1}^{\tau_1}, \dots, \phi_{t_k}^{\tau_k}$ 是相应的流。按积分流形的定义, 对所有有定义的 t_i 值, $\phi_{t_i}^{\tau_i}(p)$ 应当是 S 的一点。因此, S 应当包含 N 上所有能表达为下形式的点:

$$\phi_{t_k}^{\tau_k} \circ \phi_{t_{k-1}}^{\tau_{k-1}} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{\tau_1}(p)$$

研究一个特例。如果 τ 和 θ 是 Δ 中向量场, 在此二向量场作用下, 在 $t=0$ 通过点 p 的一条光滑轨迹

$$\begin{aligned} \sigma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow N \\ \sigma(t) &= \phi_{t_1}^{\tau} \circ \phi_t^{\theta} \circ \phi_{-t_1}^{\tau}(p) \end{aligned}$$

显然应当被包含在 S 中。点 p 的切向量自然应包含在 $\Delta(p)$ 中。令 $q = \phi_{-t_1}^{\tau}(p)$, $w = \phi_{t_1}^{\tau} \circ \phi_t^{\theta}(q)$, 点 q 分别在 θ 和 τ 作用下映射到点 w 。点 q 切向量 $\theta(q)$ 做切向量映射, 按切向量映射定义, 为

$$(\phi_{t_1}^{\tau} \circ \phi_t^{\theta})_* \theta(q) = \theta(\phi_{t_1}^{\tau} \circ \phi_t^{\theta}(q))$$

当 $t=0$ 时, 此式简化为

$$(\phi_{t_1}^{\tau})_* \theta(q) = \theta(\phi_{t_1}^{\tau}(q))$$

注意到 $q = \phi_{-t_1}^{\tau}(p)$, 右端实际为 $\theta(p)$, 而 $\theta(p) \in \Delta(p) = \Delta(\phi_{t_1}^{\tau}(q))$, 所以得必要条件

$$(\phi_{t_1}^{\tau})_* \theta(q) \in \Delta(\phi_{t_1}^{\tau}(q)) \quad (9-3)$$

这揭示了 Sussmann 定理条件的合理性。

在使用定理 9.2 检查给定分布 Δ 是否具有最大积分流形特性时, 要求对 Δ 中所有向量场 τ 检查 $(\phi_t^{\tau})_*$ 能把 $\Delta(p)$ 映射到 $\Delta(\phi_t^{\tau}(p))$ 。实际上, 如果分布 Δ 就全局而言是由一组基底向量场张成, 则定理 9.2 可化简为只要求基底向量场满足条件, 于是有下面的定理。

9.1.5.2 另一 Sussmann 定理

定理 9.3 设 p 是 N 上的任意点, Δ 是全流形 N 上有定义的分布, S 是分布 Δ 通过点 p 的积分流形, T 是张成分布 Δ 的一组基底向量场。分布 Δ 有最大积分流形特性的充要条件是, 在 S 上, 对定义流 $\phi_t^{\tau}(p)$ 用到的每个基底向量场 $\tau \in T$ 和每对 $(t, p) \in R \times N$, 向量场映射 $(\phi_t^{\tau})_* : T_p N \rightarrow T_{\phi_t^{\tau}(p)} N$ 能把点 p 的子空间 $\Delta(p)$ 映射到同一 S 上的点 $\phi_t^{\tau}(p)$ 的子空间 $\Delta(\phi_t^{\tau}(p))$ 内。

9.1.6 分布有最大积分流形特性的充分条件

使用定理 9.2 和定理 9.3 的不方便之处是, 在检查是否满足定理 9.2 和定理 9.3 的条件时, 要求对流 ϕ_t^{τ} 有了解。而检查分布对合就比较方便, 因为检查对合只要计算李括号。

因此,很希望分布对合同也是充分条件。下面介绍促成“分布对合同也是充分条件”的有关定理。

定义 9.4 一全流形 N 上有定义的向量场集合 T 是局部有限(个基底)生成的(locally finitely generated)是指,对每个 $p \in N$,存在 p 的邻域 U 和 T 的一个有限子集 $\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$,使 T 中任一向量场 τ 在 U 上可表为

$$\tau = \sum_{i=1}^k c_i \tau_i$$

式中, c_i 是定义在 U 上的一个光滑函数。

此定义把定义在局域的非奇异概念组合成一个着眼于全流形 N 的非奇异概念。

引理 9.4 设 p 是 N 上的任意点, Δ 是全流形 N 上有定义的分布, S 是分布 Δ 通过点 p 的积分流形, T 是一个张成分布 Δ 的被局部有限生成的向量场集合, θ 是 Δ 内或外的向量场, 对所有 $\tau \in T$ 有 $[\theta, \tau] \in T$, 则对定义流 $\phi_t^\theta(p)$ 用到的每对 $(t, p) \in R \times N$, 点 p 向量场映射 $(\phi_t^\theta)_* : T_p N \rightarrow T_{\phi_t^\theta(p)} N$ 能把点 p 的子空间 $\Delta(p)$ 映射到同一 S 上的点 $\phi_t^\theta(p)$ 的子空间 $\Delta(\phi_t^\theta(p))$ 内。

此定理的条件是能把 $\Delta(p)$ 映射到 $\Delta(\phi_t^\theta(p))$ 的充分条件, 因此也就是定理 9.2 和定理 9.3 成立的充分条件。

证明 用来证明定理 7.1 的式(7-23)的内容可以用于此处。注意式(7-23)

$$\frac{\partial \phi_t^\theta}{\partial x} \tau \circ \phi_{-t}^\theta \in \Delta(x)$$

就是

$$(\phi_t^\theta(x))_* \tau \circ \phi_{-t}^\theta(x) \in \Delta(x)$$

的矩阵和向量形式。把 $x = \phi_t^\theta(p)$ 代入, 就得到本定理所要证明的结果

$$(\phi_t^\theta(x))_* \tau(p) \in \Delta(\phi_t^\theta(p))$$

定理 9.5 如果分布 Δ 对合, 并且由局部有限生成集 T 张成, 则它具有最大积分流形特性。

证明 由上面的引理, 视 θ 为 Δ 内向量场, 因对合, 引理成立。再用 Sussmann 定理即得证。

推论 9.6 一个非奇异分布有最大积分流形特性的充要条件是它是对合的。

证明 分布是对合的。因为非奇异, 分布中任意向量场可用基底向量场线性表示, 所以分布是由局部有限生成集 T 张成的。由定理 9.5 和引理 9.1 可知, 推论成立。

9.2 用最小子代数相当的分布代替不变最小分布

9.2.1 概述

前一章定义了 R 分布。 R 分布是针对控制系统的一种不变最小分布, 可用于右端分布非奇异情况下的控制系统的能控性分解问题。 R 分布使用不变性来表达李积封闭性, 而不直接使用对合概念。 R 分布在奇异点上的不变性常不能保持, 因此, R 分布不适用于全

局分解。最小子代数相当的分布 Δ_c , 通过代数本身乘法所具有的封闭性来保证李积封闭性, 相当于直接使用对合概念, 在奇异点也同样适用, 适用于全局分解。放弃不变性概念, 直接使用对合性概念, 是 Δ_c 分布和 R 分布的主要差异。

9.2.2 最小子代数

9.2.2.1 最小子代数定义

定义 2.9 已经定义了光滑向量场集合 $V(N)$, 在此基础上, 定义 2.12 定义了光滑向量场李代数。下面进一步定义子代数。

定义 9.5 在向量空间 $V(N)$ 上定义李积 $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ 以后, $V(N)$ 成为李代数。如果 $V(N)$ 的子集自身有此属性, 即李积后仍属于子集, 则该子集构成子代数(subalgebra)。

定义 9.6 设 τ_1, \dots, τ_q 是一个有限的向量场集合, L_1, L_2 是 $V(N)$ 的两个子代数, 均包含向量场 τ_1, \dots, τ_q , 显然, $L_1 \cap L_2$ 也是 $V(N)$ 的子代数, 且包含 τ_1, \dots, τ_q 。由此知, 存在唯一的 $V(N)$ 的子代数 L , 它包含 τ_1, \dots, τ_q , 且被包含在所有其它包含 τ_1, \dots, τ_q 的 $V(N)$ 的子代数中。我们称 L 为包含 τ_1, \dots, τ_q 的 $V(N)$ 的最小子代数(smallest subalgebra of $V(N)$ which contains the vector fields τ_1, \dots, τ_q)。

在上面的定义中, 最小子代数由光滑向量场构成。如果 $L_1 \cap L_2$ 后不光滑, 则用 $\text{smt}(L_1 \cap L_2)$ 代替。下面介绍子代数 L 的另一种表述方法。

定理 9.7 最小子代数 L 等价于 L_0 中向量场做有限次线性组合的集合, 即

$$L = LC(L_0) \quad (9-4)$$

式中

$$L_0 = \{\tau \in V(N) : \tau = [\tau_k, [\tau_{i_{k-1}}, \dots, [\tau_{i_2}, \tau_{i_1}]]]; 1 \leq i_k \leq q, 1 \leq k < \infty\} \quad (9-5)$$

证明 首先证明 $LC(L_0) \subset L$ 。从构造看, L_0 的每个向量场都是 L 的一个元素, 因为 L 是 $V(N)$ 的子代数, 包含 τ_1, \dots, τ_q , 必包含 $[\tau_k, [\tau_{i_{k-1}}, \dots, [\tau_{i_2}, \tau_{i_1}]]]$ 形式的每个向量场。这样, $LC(L_0) \subset L$ 。注意, 对 $1 \leq i \leq q, \tau_i \in LC(L_0)$ 。

其次, 证明 $LC(L_0) = L$ 。这实际上是要我们证明, $LC(L_0)$ 是 $V(N)$ 的一个子代数, 有自封闭性。因为 L_0 中向量场任何两个做李括号或相加, 都仍然是 L_0 元素或 L_0 元素的一个线性组合, 所以 $LC(L_0)$ 是 $V(N)$ 的一个子代数的事实成立。得证。

9.2.2.2 最小子代数 L 相当的分布及其性质

最小子代数 L 是以向量场为元素的代数系统, 也是向量场集合或空间, 包含 τ_1, \dots, τ_q , 且李积封闭。

定义 9.7 把最小子代数 L 定义为一个分布, 称为与最小子代数 L 相当的分布, 记为 Δ_L , 其定义为

$$\Delta_L = \text{span}\{\tau : \tau \in L\} \quad (9-6)$$

根据最小子代数 L 定义, 易知 Δ_L 有如下性质:

性质 1 Δ_L 对合。因 L 本身有李积封闭性质。

性质 2 Δ_L 包含 τ_1, \dots, τ_q , 且最小。

性质 3 Δ_L 不一定非奇异。

性质 4 Δ_L 不一定有最大积分子流形特性, 需补充条件才能具有最大积分子流形特

性,见下定理。

定理 9.8 如果 L 是局部有限生成的,则 Δ_L 有最大积分子流形特性。

证明 由定理 9.5 立即得证。

9.2.3 控制子代数

9.2.3.1 控制子代数定义

定义 9.8 设控制系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (9-7)$$

如果定义 9.6 中 τ_1, \dots, τ_q 特指 f, g_1, \dots, g_m , 则得到包含 f, g_1, \dots, g_m 的 $V(N)$ 的最小子代数, 被称为控制系统式(9-7)的控制李代数(control Lie algebra), 记为 C 。

9.2.3.2 最小子代数 L 相当的分布 Δ_L 专用于控制系统时称 Δ_C

定义 9.9 把控制子代数 C 定义为一个分布, 称与控制子代数 C 相当的分布, 记为 Δ_C , 其定义为

$$\Delta_C = \text{span}\{\tau : \tau \in C\} \quad (9-8)$$

控制李代数 C 相当的分布 Δ_C 与 Δ_L 有类似的性质: Δ_C 对合, 包含 f, g_1, \dots, g_m , 且最小。 Δ_C 不一定非奇异。不一定有最大积分子流形特性, 如果 C 是局部有限生成的, 则 Δ_C 有最大积分子流形特性。另外, 如果 Δ_C 非奇异, 则 Δ_C 有最大积分子流形特性。此外, 关于 Δ_C 和 Δ_C^\perp 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下的不变性有以下定理。

定理 9.9 对偶分布 Δ_C^\perp 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的。如果 Δ_C^\perp 还是光滑的, 则 Δ_C 也是在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下不变的。

证明 首先证明 Δ_C^\perp 在向量场 f 下的不变性。设 τ 是分布 Δ_C 中任意向量场, ω 是 Δ_C^\perp 中任意对偶向量场, 于是 $\langle \omega, \tau \rangle = 0, \langle \omega, [f, \tau] \rangle = 0$ 。因为 $[f, \tau]$ 也是 C 中一向量场, 由式(2-38), 得

$$\langle L_f \omega, \tau \rangle = L_f \langle \omega, \tau \rangle - \langle \omega, [f, \tau] \rangle = 0$$

所以, $L_f \omega$ 将零化 C 中所有向量场。因为 $\tau \in \Delta_C$, 所以 $L_f \omega \in \Delta_C^\perp$ 。这表示 Δ_C^\perp 在向量场 f 下是不变的。同理可证 Δ_C^\perp 在向量场 g_1, \dots, g_m 下是不变的。

如果 Δ_C^\perp 还是光滑的(比如, Δ_C 非奇异时), 则由定理可知 Δ_C 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的。证毕。

9.2.3.3 分布 Δ_C 与分布 R 的关系

定理 9.10 分布 Δ_C 与前一章引入的分布 P 和 R 有如下关系:

(1) $\Delta_C \subset P + \text{span}\{f\} \subset R$;

(2) 如果点 p 是 Δ_C 的正则点, 则 $\Delta_C(p) = P + \text{span}\{f\}(p) = R(p)$ 。

证明 (参见引理 8.4 的证明) 由定理 9.7, 控制子代数等于 L_0 中向量场的各线性组合, 即 $L = LC(L_0)$, 其中 $L_0 = \{\tau : \tau = [\tau_k, [\tau_{k-1}, \dots, [\tau_2, \tau_1]]]\}$, 而 τ_i 在 f, g_1, \dots, g_m 中选择。 L_0 相当于引理 8.4 中的 θ_i 。该定理中已经证明了 θ_i 都属于 $P + \text{span}\{f\}$, 于是(1)得证。

另一方面, 由引理 5.4, θ_i 的组合就等价于 R , 即 L_0 的组合等价于 R , 因此, 在 U 的开

稠子流形 U^* 上, $\Delta_C = P + \text{span}\{f\} = R$ 。最后,着手证明(2)本身。假设在某个邻域 V 上,分布 Δ_C 有不变的维数,由 3.1.3 节分布光滑性的性质 4,分布 Δ_C 和分布 $P + \text{span}\{f\} = R$ 在 V 上重合。(2)得证。证毕。

在 Δ_C 的正则点上,分布 Δ_C 与分布 R 将取得一致。在奇异点上, Δ_C 的向量场可能比 R 少。按 R 的定义, R 是在 f, g_1, \dots, g_m 下不变的,故 Δ_C 向量场的减少可能使它在奇异点上做不到在 f, g_1, \dots, g_m 下不变。另一方面,按 Δ_C 的定义, Δ_C 是对合的,在奇异点上, R 的向量场可能比 Δ_C 多,故 R 向量场的增加可能使它在奇异点上做不到对合。

9.3 控制系统的全局能控性分解

9.3.1 保留非奇异假设时的能控性分解

9.3.1.1 R 分布非奇异时有最大积分子流形特性

在读本节(9.3.1 节)时应当注意的是,本节不仅适用于分布 R ,也适用于分布 Δ_C 。因为当分布 Δ_C 非奇异时,由定理 9.9,有 $\Delta_C = R$,二者等价。分布 Δ_C 非奇异时具有最大积分子流形特性,可以实现和分布 R 一样的分解。

引理 9.11 设控制系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (9-9)$$

如果分布 $R = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{f, g_1, \dots, g_m\} \rangle$ 非奇异,则 R 具有最大积分子流形特性。

证明 由定理 5.5 知,不变最小分布 R 是对合的。再由推论 9.6,可证得分布 R 具有最大积分子流形特性。

9.3.1.2 R 分布非奇异时的全局分解

R 具有最大积分子流形特性,按照最大积分子流形特性定义,流形 N 可依分布 R 剖分为一些最大积分子流形,于是有下面定理。

定理 9.12 如果 R 非奇异,则存在一剖分,把流形 N 剖分为一些彼此同维的 R 的最大积分子流形。

9.3.1.3 全局分解时的部分状态能达集

因为分布 R 具有最大积分子流形特性,所以可依分布 R 把流形 N 剖分为一些最大积分子流形。已知向量场 f, g_1, \dots, g_m 的每一个都属于 R ,因而它们都切于 R 的每一个最大积分子流形。设 S_{p^0} 是 R 的通过 p^0 的最大积分子流形,则形如 $\tau = f + \sum_{i=1}^m g_i u_i$ (u_1, \dots, u_m 是实数)的向量场将切于 S_{p^0} 。因此, $t=0$ 时刻过点 p^0 的 τ 的积分曲线将属于 S_{p^0} 。由此得出结论:任何过 p^0 点的状态轨线,在一个分段不变控制下,将保持在 S_{p^0} 上。把这一结果加上定理 8.7(2),可归纳为下面定理。

定理 9.13 设 R 非奇异, S_{p^0} 是 R 的通过 p^0 的最大积分子流形,则在一个分段不变输入函数作用下,由 p^0 点出发的部分状态可达点集 $R(p^0)$ 或全状态可达点集 R 有以下性质:

- (1) $R(p^0)$ 是 S_{p^0} 的一个子集;
- (2) $R(p^0)$ 包含着 S_{p^0} 的一个开子集。

9.3.2 放弃非奇异假设时的能控性分解

9.3.2.1 分布 Δ_C 局部有限生成时有最大积分流形特性

由定理 9.5, 如果分布 Δ_C 是局部有限生成的, 则 Δ_C 有最大积分流形特性。

9.3.2.2 分布 Δ_C 有最大积分流形特性时的全局能控性分解

假设分布 Δ_C 具有最大积分流形特性。因为分布 Δ_C 具有最大积分流形特性, 所以可依分布 Δ_C 把流形 N 剖分为一些最大积分流形。已知向量场 f, g_1, \dots, g_m 的每一个都属于 Δ_C , 因而它们都切于 Δ_C 的每一个最大积分流形。设 S_{p^0} 是 Δ_C 的通过 p^0 的最大积分流形, 则形如 $\tau = f + \sum_{i=1}^m g_i u_i$ (u_1, \dots, u_m 是实数) 的向量场将切于 S_{p^0} 。因此, $t=0$ 时刻过点 p^0 的 τ 的积分曲线将属于 S_{p^0} 。由此得出结论, 任何过 p^0 点的状态轨线, 在一个分段不变控制下, 将保持在 S_{p^0} 上。

要注意的是, 如果分布 Δ_C 有最大积分流形特性, 但奇异, 则过不同点 p^1 和 p^2 的两个最大积分流形 S_{p^1} 和 S_{p^2} 的维数可能不同。相应的状态轨线也将是不同维的。

9.3.2.3 全局分解时的能达状态集

定理 9.14 设分布 Δ_C 有最大积分流形特性, S_{p^0} 是 Δ_C 的通过 p^0 的最大积分流形, 则在一个分段不变输入函数作用下, 由 p^0 点出发的部分状态可达点集或全状态可达点集 $R(p^0)$ 有以下性质:

- (1) $R(p^0)$ 是 S_{p^0} 的一个子集;
- (2) $R(p^0)$ 包含着 S_{p^0} 的一个开子集。

9.3.3 全局分解时的全状态能控秩条件

定义 9.10 如果控制系统式(9-9)对每个初始状态 $p^0 \in N$, 在分段不变输入函数作用下能达的状态集至少充满 N 的(而不是比 N 的阶数低的)一个开子集, 则称系统式(9-9)在 N 上是弱(全状态)能控的(weakly controllable on N)。

请注意, 这里定义的弱(全状态)能控与 6.2.1.3 节定义的弱能控性虽然都用了“弱”的字样, 但它们是很不同的。6.2.1.3 节定义的弱能控性是建立在弱能达概念之上的; 这里定义的弱(全状态)能控建立在能达概念之上。同时这里定义的弱(全状态)能控和 6.2.1.2 节定义的局部能控性也不是一回事, 它不是建立在 U -可达点概念之上的。这里所谓的“弱”只不过是说全状态能控点集没有能达到整个流形 N , 而只是 N 的一个同维开子集。

定理 9.15 控制系统式(9-9)在 N 上弱(全状态)能控的一个充分条件是, 对所有 $p \in N$, 有

$$\dim \Delta_C(p) = n \quad (9-10)$$

如果分布 Δ_C 有最大积分流形特性, 则此条件也是必要的。

证明 (充分性) 如果对所有 $p \in N$ 有 $\dim \Delta_C(p) = n$, 则 Δ_C 是非奇异的。由定理 2.7 知, $\Delta_C = R$, 由定理 9.12 知, Δ_C 有最大积分流形特性。由定理 9.14 知, 系统是弱(全状

态)能控的。(必要性)反证法:如果 Δ_c 有最大积分流形特性,且在某个点 $p^0 \in N$ 有 $\dim \Delta_c(p^0) < n$,则由定理 9.12 知,由 p^0 出发的可达状态集属于其维数严格小于 n 的一个 N 的最大积分流形。不符合(全状态)弱能控定义中(全状态)可达点集至少包含 N 的一个开子集的要求,可见必有 $\dim \Delta_c(p^0) = n$ 。

定义 9.11 控制系统式(9-9)如在每点 $p^0 \in N$ 满足

$$\dim \Delta_c(p^0) = n \quad (9-11)$$

则称系统在全 N 上满足(全状态)能控性秩条件(controllability rank condition)。

如果满足式(9-11),而且 Δ_c 有最大积分流形特性,则 Δ_c 的过 p^0 的最大积分流形的维数为 n ,并且由定理 9.12 知,由 p^0 出发的全状态可达点集至少充满状态空间的一个开集。

例 9.4 (线性系统,分布 Δ_c 奇异和有最大积分流形特性)线性定常系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = Ax + bu = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

这里 $N = R^3$ 。要求进行系统全局能控分解。

首先,寻找包含 f, g ,即包含 Ax, b 的控制李代数 C 。对于线性定常系统,很容易验证向量场集合 $\{Ax\} \cup \{b, Ab, A^2b\}$ 构成的,以实数为系数的线性组合 $LC(\{Ax\} \cup \{b, Ab, A^2b\})$ 就是控制李代数 C ,即

$$\begin{aligned} C &= LC(\{Ax\} \cup \{b, Ab, A^2b\}) = LC \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= LC \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

事实上, $[Ax, b] = -Ab, [Ax, Ab] = -A^2b, [Ax, A^2b] = -b$ 表明线性组合对李括号是封闭的,构成了控制李代数 C 。

其次,确定与控制李代数 C 相当的分布 Δ_c 。 Δ_c 应为

$$\Delta_c(x) = \text{span}\{Ax\} + \text{span}\{b, Ab, A^2b\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

观察可知,在 $x_2 = x_3 = 0$,即在 x_1 轴上为奇异点,其上分布为 1 维。这时 Ax 属于分布 $P = \text{span}\{b, Ab, A^2b\} = \text{span}\{b\}$ 。在其它点上,包括 x_2, x_3 轴上都非奇异,为 2 维。

再其次,求最大积分流形。因为 Δ_c 由两个向量场张成,是局部有限生成的,所以有最大积分流形特性。最大积分流形与初始点 x^0 位置有关,有以下几种情形:

(1)如果 x^0 满足 $x_2^0 = 0$,那么,通过 x^0 的最大积分流形是半开坐标平面,即

$$\{x \in R^n : x_2 = 0 \text{ 并且 } \text{sgn}(x_3) = \text{sgn}(x_3^0)\}$$

(2)如果 x^0 满足 $x_3^0 = 0$,那么,通过 x^0 的最大积分流形是半开坐标平面,即

$$\{x \in R^n : x_3 = 0 \text{ 并且 } \text{sgn}(x_2) = \text{sgn}(x_2^0)\}$$

(3)如果 x^0 满足 $x_2^0 = x_3^0 = 0$,那么,通过 x^0 的最大积分子流形是 x_1 坐标轴,即

$$\{x \in R^n : x_2 = x_3 = 0\}$$

(4)对此外任意 x^0 点, $x_2^0 \neq 0$ 并且 $x_3^0 \neq 0$,那么,通过 x^0 的最大积分子流形是平行于 x_1 坐标轴的双曲面的一叶,即

$$\{x \in R^n : x_2 x_3 = x_2^0 x_3^0\}$$

此双曲面方程是根据分布 Δ_C 的两个向量场 $(x_1 \quad -x_2 \quad x_3)^T$ 和 $(1 \quad 0 \quad 0)^T$ 确定的。它们构成了任一点 x 的切平面。按这一条件求曲面方程,最后得 $x_2 x_3 = x_2^0 x_3^0$ 。

按最大积分子流形的性质,状态轨线将始终运动在通过初始点 x^0 的最大积分子流形上。如果想要转移到其它最大积分子流形上去,则必须借助于分布 Δ_C 以外的向量场。

9.4 用最小子空间相当的对偶分布代替 不变最小对偶分布

9.4.1 概述

前一章定义了 Q 分布。 Q 分布是针对控制系统的一种不变最小分布,可用于右端分布非奇异情况下的控制系统的能观性分解问题。 Q 分布使用不变性来表达李积封闭性,而不是直接使用对合概念。 Q 分布在奇异点上其不变性常不能保持,因此, Q 分布不适用于全局分解。最小子空间相当的对偶分布 Ω_S ,通过子空间 S 本身在李导数下所具有的封闭性来保证分布 Ω_S^\perp 的李积封闭性,相当于直接使用对合概念,在奇异点也同样适用,适用于全局分解。放弃不变性概念、直接使用对合性概念,是 Ω_S^\perp 分布和 Q 分布的主要差异。

9.4.2 最小子空间

9.4.2.1 最小子空间定义

定义 1.2 已经定义了光滑函数集合 $C^\infty(N)$,定义 2.7 已经定义了光滑函数的李导数。下面在此基础上进一步定义 C^∞ 函数空间和子空间。

定义 9.12 在光滑函数集合 $C^\infty(N)$ 上定义“加”和“数乘”运算

$$\begin{aligned} (\lambda_I + \lambda_{II})(x) &= \lambda_I(x) + \lambda_{II}(x) & \forall \lambda_I, \lambda_{II} \in C^\infty(N) \\ (a\lambda_I)(x) &= a\lambda_I(x) & \forall a \in R \quad \lambda_I \in C^\infty(N) \end{aligned} \quad (9-12)$$

定义二运算之后,构成了线性空间 $C^\infty(N)$,并称它为 N 上的 C^∞ 函数空间(C^∞ function space)。

在此基础上,再按定义 2.7,在函数空间 $C^\infty(N)$ 上定义李导数 $L_f: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(N)$,对于所定义的李导数, $C^\infty(N)$ 本身具有封闭性。

定义 9.13 如果 $C^\infty(N)$ 的某个子集自身有封闭性,即求李导数后仍属于子集,则该子集被称为函数空间 $C^\infty(N)$ 的子空间(subspace)。

定义 9.14 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ 是一有限个实值函数集合, τ_1, \dots, τ_q 是一有限个向量场集合, S_1, S_2 是 $C^\infty(N)$ 的两个子空间,均包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$,并对所有 $1 \leq j \leq q$ 满足 $L_{\tau_j} \lambda \in S_i, i =$

1, 2, 显然 $S_1 \cap S_2$ 也是 $C^\infty(N)$ 的子空间, 包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, 且 $L_{\tau_j} \lambda \in S_1 \cap S_2$ 。由此知, 存在唯一的 $C^\infty(N)$ 的子空间 S , 它包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, 且被包含在所有其它包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ 的 $C^\infty(N)$ 的子空间中, 对所有 $\lambda \in S$ 和所有 $1 \leq j \leq q$, 满足 $L_{\tau_j} \lambda \in S$ 。我们称 S 为 $C^\infty(N)$ 的包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, 且在对 τ_1, \dots, τ_q 的李导数运算下封闭的最小子空间 (smallest subspace of $C^\infty(N)$ which contains $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ and closed under lie differentiation along τ_1, \dots, τ_q)。

下面介绍子空间 S 的另一种表述方法。

定理 9.16 最小子空间 S 等价于 S_0 中光滑函数做有限次线性组合的集合, 即

$$S = LC(S_0) \quad (9-13)$$

式中

$$S_0 = \{ \lambda \in C^\infty(N) : \lambda = \lambda_j \text{ 或 } \lambda = L_{\tau_{i_1}} \cdots L_{\tau_{i_k}} \lambda_j ; \\ 1 \leq j \leq l, 1 \leq i_k \leq q, 1 \leq k \leq \infty \} \quad (9-14)$$

证明 首先证明 $LC(S_0) \subset S$ 。从构造看, S_0 的每个光滑函数都是 S 的一个元素, 因为 S 是 $C^\infty(N)$ 的子空间, 包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, 必包含 $L_{\tau_{i_1}} \cdots L_{\tau_{i_k}} \lambda_j$ 形式的每个向量场。这样, $LC(S_0) \subset S$ 。注意, 对 $1 \leq j \leq l$, 有 $\lambda_j \in LC(S_0)$ 。

其次, 证明 $LC(S_0) = S$ 。这实际上是要我们证明 $LC(S_0)$ 是 $C^\infty(N)$ 的一个子空间, 有自封闭性。因为 S_0 中任何两个光滑函数相加, 都仍然是 S_0 元素或 S_0 元素的一个线性组合, 所以 $LC(S_0)$ 是 $C^\infty(N)$ 的一个子空间的事实成立。得证。

9.4.2.2 最小子空间 S 相当的对偶分布及其性质

最小子空间 S 是以光滑函数为元素的集合或空间, 包含 τ_1, \dots, τ_q , 且对李导数封闭。

定义 9.15 以最小子空间 S 为对象函数集定义一个全微分对偶分布, 称与最小子空间 S 相当的对偶分布, 记为 Ω_S , 其定义为

$$\Omega_S = \text{span} \{ d\lambda : \lambda \in S \} \quad (9-15)$$

根据最小子空间 S 定义, 易知 Ω_S 有如下性质。

性质 1 Ω_S^\perp 中向量场与全微分对偶向量场 $d\lambda : \lambda \in S$ 正交。事实上, 设 τ 是 Ω_S^\perp 中的向量场, λ 是 S 中任意函数。因为 $d\lambda \in \Omega_S$, $\tau \in \Omega_S^\perp$, 所以 $\langle d\lambda, \tau \rangle = 0$ 。

性质 2 Ω_S^\perp 对合。事实上, 设 τ_1 和 τ_2 是 Ω_S^\perp 中两向量场, λ 是 S 中任意函数。因为 $d\lambda \in \Omega_S$, $\tau_1, \tau_2 \in \Omega_S^\perp$, 所以 $\langle d\lambda, \tau_1 \rangle = 0, \langle d\lambda, \tau_2 \rangle = 0$ 。于是得

$$\langle d\lambda, [\tau_1, \tau_2] \rangle = L_{\tau_1} \langle d\lambda, \tau_2 \rangle - L_{\tau_2} \langle d\lambda, \tau_1 \rangle = 0$$

因此, 向量场 $[\tau_1, \tau_2] \in \Omega_S^\perp$ 。

性质 3 按构造, 对偶分布 Ω_S 是光滑的, 包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, 且最小。分布 Ω_S^\perp 未必是光滑的, 但最大。

性质 4 Ω_S^\perp 不一定非奇异。

性质 5 Ω_S^\perp 不一定有最大积分子流形特性。需补充条件才能具有最大积分子流形特性, 见下面的定理 9.17。

对偶分布 Ω_S 是光滑的, 由正交对偶分布光滑性质 1 知, 分布 Ω_S^\perp 未必是光滑的。但是, 因为要用分布 Ω_S^\perp 来把状态空间剖分为最大积分子流形, 所以我们只对光滑分布感兴

趣。为此必须借助和引入向量场集合 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ (定义 3.7)。

定理 9.17 如果 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ 中所有向量场的集合是局部有限生成的, 则 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ 有最大积分流形特性。

证明 由定理 9.5, 我们只需要证明 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ 是对合的。设 τ_1 和 τ_2 是 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ 中两向量场, λ 是 S 中任意函数。因为 $d\lambda \in \Omega_S$, $\tau_1, \tau_2 \in \text{smt}(\Omega_S^\perp)$, 所以

$$\langle d\lambda, \tau_1 \rangle = 0 \quad \langle d\lambda, \tau_2 \rangle = 0$$

于是得

$$\langle d\lambda, [\tau_1, \tau_2] \rangle = L_{\tau_1} \langle d\lambda, \tau_2 \rangle - L_{\tau_2} \langle d\lambda, \tau_1 \rangle = 0$$

因此向量场 $[\tau_1, \tau_2] \in \Omega_S^\perp$, 而且因为 $[\tau_1, \tau_2]$ 光滑, 所以 $[\tau_1, \tau_2]$ 必在 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ 中。 $\text{smt}(\Omega_S^\perp)$ 对合得证。

9.4.3 观察空间

9.4.3.1 观察空间定义

定义 9.16 设控制系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (9-16a)$$

$$y = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq l \quad (9-16b)$$

如果在定义 9.16 中, τ_1, \dots, τ_q 特指 $f, g_1, \dots, g_m, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ 特指 h_1, \dots, h_l , 则得到包含函数 h_1, \dots, h_l , 沿向量场 f, g_1, \dots, g_m 的李导数封闭的 $C^\infty(N)$ 的最小子空间, 被称为控制系统式(9-16)的观察空间(observation space), 记为 O 。

9.4.3.2 最小子空间 S 相当的对偶分布 Ω_S 专用于控制系统时称为 Ω_O 。

定义 9.17 把观察空间 O 定义为一个对偶分布, 称之为与观察空间 O 相当的对偶分布, 记为 Ω_O , 其定义为

$$\Omega_O = \text{span}\{d\lambda : \lambda \in O\} \quad (9-17)$$

观察空间 O 相当的对偶分布 Ω_O 与 Ω_S 有类似的性质: Ω_O^\perp 中向量场 τ 与全微分对偶向量场 $\{d\lambda : \lambda \in O\}$ 正交, 即 $\langle d\lambda, \tau \rangle = 0$; Ω_O^\perp 对合; 对偶分布 Ω_O 是光滑的, 包含 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, 且最小, 分布 Ω_O^\perp 未必是光滑的, 但最大; Ω_O^\perp 不一定非奇异。 Ω_O^\perp 不一定有最大积分流形特性, 如果 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 中所有向量场的集合是局部有限生成的, 则 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 有最大积分流形特性。另外, 如果 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 非奇异, 则 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 有最大积分流形特性。此外, 关于 Ω_O 和 Ω_O^\perp 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下的不变性有以下定理。

定理 9.18 分布 Ω_O^\perp 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的。如果 Ω_O^\perp 还是光滑的, 则 Ω_O 也是在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下不变的。

证明 首先证明 Ω_O^\perp 在向量场 f 下的不变性。设 λ 是 O 中任一函数, τ 是分布 Ω_O^\perp 中任意向量场, 于是 $\langle d\lambda, \tau \rangle = 0, \langle dL_f \lambda, \tau \rangle = 0$ 。因为 $L_f \lambda$ 也是 O 中一函数, 由式(2-38)、式(2-39), 得

$$\langle d\lambda, [f, \tau] \rangle = L_f \langle d\lambda, \tau \rangle - \langle dL_f \lambda, \tau \rangle = 0$$

所以, $[f, \tau]$ 将零化 O 中所有函数。因为 $d\lambda \in \Omega_O$, 所以, $[f, \tau] \in \Omega_O^\perp$ 。这表示 Ω_O^\perp 在向量场 f 下是不变的。同理可证, Ω_O^\perp 在向量场 g_1, \dots, g_m 下是不变的。

如果分布 Ω_0^\perp 还是光滑的(比如, Ω_0 非奇异时),则由定理 4.2 可知 Ω_0 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的。证毕。

9.4.3.3 分布 Ω_0^\perp 与分布 Q 的关系

定理 9.19 分布 Ω_0^\perp 与前一章引入的分布 Q 有如下关系:

(1) $\Omega_0^\perp \supset Q$ 或 $\Omega_0 \subset Q^\perp$;

(2) 如果点 p 是 Ω_0 的正则点,则 $\Omega_0^\perp(p) = Q(p)$ 或 $\Omega_0(p) = Q^\perp(p)$ 。

证明 (参见引理 8.4 和定理 9.10 的证明)由定理 9.16,最小子空间等于 S_0 中光滑函数的各线性组合,即 $S = LC(S_0)$,其中 $S_0 = \{\lambda: \lambda = \lambda_j \text{ 或 } \lambda = L_{\tau_{i_1}} \cdots L_{\tau_{i_k}} \lambda_j\}$,而 λ_j 在 h_1, \dots, h_l 中选择。 S_0 求全微分后,相当于引理 5.9 中的 ω_i 。该定理中已经证明了 ω_i 都属于 Q^\perp ,于是 $\Omega_0 \subset Q^\perp$, (1)得证。另一方面,由引理 5.9, ω_i 的组合就等价于 Q^\perp ,即 S_0 求全微分后的组合等价于 Q^\perp ,因此,在 U 的开稠子流形 U^* 上, $\Omega_0 = Q^\perp$ 。最后,着手证明(2)本身。假设在某个邻域 V 上,对偶分布 Ω_0 有不变的维数,即分布 Ω_0^\perp 有不变的维数,由 3.1.3 节分布光滑性的性质 4,分布 Ω_0^\perp 与分布 Q 在 V 上重合,即对偶分布 Ω_0 和对偶分布 Q^\perp 在 V 上重合。(2)得证。定理证毕。

在正则点上,分布 Ω_0^\perp 与分布 Q 将取得一致。在奇异点上, Ω_0^\perp 的向量场可能比 Q 少。按 Q 的定义, Q 是在 f, g_1, \dots, g_m 下不变的,故 Ω_0^\perp 向量场的减少,可能使它在奇异点上做不到在 f, g_1, \dots, g_m 下不变。另一方面,按 Ω_0^\perp 的定义, Ω_0^\perp 是对合的,在奇异点上, Q 的向量场可能比 Ω_0^\perp 多,故 Q 向量场的增加,可能使它在奇异点上做不到对合。

9.5 控制系统的全局能观性分解

9.5.1 保留非奇异假设时的能观性分解

9.5.1.1 Q 分布非奇异时有最大积分子流形特性

在读本节(9.5.1 节)时,应当注意的是本节不仅适用于分布 Q ,也适用于分布 Ω_0^\perp 。因为当分布 Ω_0^\perp 非奇异时,由定理 9.19,有 $\Omega_0^\perp = Q$,二者等价。分布 Ω_0^\perp 非奇异时,具有最大积分子流形特性,可以实现和分布 Q 一样的分解。

引理 9.20 设控制系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (9-18a)$$

$$y = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq l \quad (9-18b)$$

如果分布 $Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \rangle^\perp$ 非奇异,则 Q 对合,而且 Q 具有最大积分子流形特性。

证明 由定理 5.10 知,不变最小分布 Q 是对合的。再由推论 9.6,可证得分布 Q 具有最大积分子流形特性。

9.5.1.2 Q 分布非奇异时的全局分解

Q 具有最大积分子流形特性。按照最大积分子流形特性定义,流形 N 可依分布 Q 剖

分为一些最大积分子流形,于是得到定理 9.21。

定理 9.21 如果 Q 非奇异,则存在一剖分,把流形 N 剖分为一些彼此同维的 Q 的最大积分子流形。

9.5.1.3 全局分解时的部分状态不可区分点集

因为分布 Q 非奇异时具有最大积分子流形特性,所以可依分布 Q 把流形 N 剖分为一些最大积分子流形。设 S 是 Q 的任一最大积分子流形,因为 Q 在 f, g_1, \dots, g_m 下不变,所以也在形如 $\tau = f + \sum_{i=1}^m g_i u_i, u_1, \dots, u_m$ 是实数的任意向量场下不变。由最大积分子流形性质 2, 给定 S 中任意两点 p^a 和 p^b 和形如 $\tau = f + \sum_{i=1}^m g_i u_i$ 的任意向量场,对所有 t , 点 $\phi_t^\tau(p^a)$ 和点 $\phi_t^\tau(p^b)$ 属于 Q 的同一最大积分子流形。由此可知,从 Q 的某个最大积分子流形上的任意二初始状态出发,在同样分段不变控制作用下,得到的两条轨线在任何时候,将通过 Q 的同一最大积分子流形。

可以证明,函数 h_1, \dots, h_l 在 Q 的各最大积分子流形上是常数。事实上,设 S 是 Q 的任一最大积分子流形,在 S 的每点 p, h_1, \dots, h_l 沿 $T_p S$ 中任意切向量的导数为零。这是因为分布 Q 与 $T_p S$ 一致,而 $Q \subset (\text{span}\{dh_i, i=1, \dots, l\})^\perp$, 即 Q 在 h_1, \dots, h_l 的梯度的正交方向。因此,函数 h_1, \dots, h_l 在 Q 的各最大积分子流形上是常数。

由此得结论,如果 p^a 和 p^b 是属于 Q 的同一最大积分子流形的两个初始状态,那么,在同一分段不变控制作用下,得到的两条轨线在任何时候,每个输出分量将有同样的值,即不可区分。把这一结果加上定理 8.10(2),可归纳为定理 9.22。定理 9.22 是定理 8.10 的全局形式。

定理 9.22 设 Q 非奇异,则存在一剖分,把流形 N 剖分为一些 Q 的最大积分子流形,而且都具有同样维数。用 S_{p^0} 记 Q 的通过 p^0 的最大积分子流形,则

(1) 在分段不变输入函数作用下, S_{p^0} 上的点都不能与 p^0 点相区分;

(2) p^0 有一个开邻域 $U \subset N$ 具有这样的性质:在分段不变输入函数作用下,任何不能与 p^0 点相区分的点 $p \in U$, 必然属于 $U \cap S_{p^0}$ 。

证明 (1)已证。(2)首先证明 U 过 p^0 的一片被包含于 $U \cap S_{p^0}$ 中。因 Q 非奇异,在任一点 p^0 附近,可找到一邻域 U 和一个剖分,把 U 剖为一些片,即一些 Q 的最大积分子流形。而且, S_{p^0} 与 U 的交是 S_{p^0} 的一个非空开子集,也是 Q 的一个积分子流形。因为 S_{p^0} 的最大性, U 过 p^0 的一片被包含于 $U \cap S_{p^0}$ 中。其次,证明不能与 p^0 点相区分的任何点 $p \in U$, 必然属于 $U \cap S_{p^0}$ 。由定理 8.10,任何在分段不变输入函数作用下,不能与 p^0 点相区分的任何状态点属于 U 过 p^0 的一片,因此必然属于 $U \cap S_{p^0}$ 。

9.5.2 放弃非奇异假设时的能观性分解

9.5.2.1 分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 局部有限生成时有最大积分子流形特性

由定理 9.5, 如果分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 是局部有限生成的, 则 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 有最大积分子流形特性。

9.5.2.2 分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 有最大积分子流形特性时的全局不可区分性分解

由定理 9.18 和定义 4.3 可知, 分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 在向量场 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的, 所以

它在形如 $\tau = f + \sum_{i=1}^m g_i u_i, u_1, \dots, u_m$ 是实数的任意向量场下是不变的。

假设分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 中所有向量场构成的集合是局部有限生成的, 可知 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 具有最大积分子流形特性。因为分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 具有最大积分子流形特性, 所以可依分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 把流形 N 剖分为一些最大积分子流形。如定理 9.2 的证明中所作的, 可知由 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 的同一积分子流形上的任意两点出发, 在同一分段不变控制作用下, 得到的两条轨线在任何时候都处于 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 的同一最大积分子流形上。

现在看到, $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 被包含在 $(\text{span}\{dh_i\})^\perp, 1 \leq i \leq l$ 中。因为 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)(p)$ 中每个切向量同时也在 $\Omega_O^\perp(p)$ 中, 而 $\Omega_O^\perp(p)$ 中每个切向量 v 都满足 $\langle dh_i(p), v \rangle = 0, 1 \leq i \leq l$, 所以函数 h_1, \dots, h_l 在 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 的每个最大积分子流形上是常数。

这一结果表明, 在 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 的同一最大积分流形上的任二初始状态 p^a 和 p^b , 在分段不变输入函数作用下是不可区分的。

要注意的是, 如果分布 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 有最大积分流形特性, 但奇异, 则过不同点 p^1 和 p^2 的两个最大积分流形 S_{p^1} 和 S_{p^2} 的维数可能不同。相应的状态轨线也将是不同维的。

9.5.2.3 全局分解时的部分状态不能区分点集

定理 9.23 设包含在 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 中的所有向量场构成的集合是局部有限生成的, 设 S_{p^0} 是 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 过 p^0 的最大积分子流形, 则

(1) 在分段不变输入下, S_{p^0} 上没有任何点能与 p^0 相区分;

(2) 如果 p^0 是 Ω_O 的一个正则点, 则 N 中有一个开邻域 U 具有这样的性质: 在分段不变输入函数作用下, 任何不能与 p^0 点相区分的点 $p \in U$, 必然属于 $U \cap S_{p^0}$ 。

证明 (1) 已证。(2) 的证明实际上与定理 9.22 的(2)证明相同。下面的例子说明为什么有必要加上 p^0 是 Ω_O 的一个正则点的条件。

例 9.5 (定理 9.23 加上正则性条件的必要性) 考虑 $N = R$ 的一维系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

其中

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

这里, $\sin(1/x)$ 是变周期的正弦波形, x 越大, 周期越大。 $\exp(-1/x)$ 是正弦波形的包络线。让我们研究此例的不可区分性。首先, 研究 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 的最大积分子流形特性。观察空间 O 是只包含光滑函数 $h(x)$ 的 $C^\infty(N)$ 子空间。与观察空间 O 相当的对偶分布 $\Omega_O = \text{span}\{dh\}$ 。这是一个奇异对偶分布, 在 $dh/dx = 0$ 的 x 点(包括 $x = 0$)的维数为零, 其余 x 点的维数为 1。可见, Ω_O^\perp 中任何光滑向量场只能在全 R 上恒等于 0, 因此 $\text{smt}(\Omega_O^\perp) = \{0\}$ 。 $\text{smt}(\Omega_O^\perp)$ 的通过 x 点的最大积分子流形 S_x 是零维, 只能是 x 点自己。

其次, 研究与 $x = 0$ 不可区分的点集。对此系统来说, 两点 x^a, x^b 不可区分的充要条件是 $h(x^a) = h(x^b)$, 因此, 与 $x = 0$ 不可区分的点集是方程 $h(x) = 0$ 的根的集合。方程 $h(x) = 0$ 的根彼此相互隔离, 只有 $x = 0$ 处例外。点 $x = 0$ 可找到满足 $h(x) = 0$ 的一维开邻域 U 。 U 包含的点都与 $x = 0$ 不可区分。

最后,我们将看到,与 $x=0$ 不可区分的点集并不在 $U \cap S_p^0$ 上。因为已说明 $\text{smt}\{\Omega_0^\perp\}$ 的通过 $x=0$ 点的最大积分子流形 S_0 只能是 $x=0$ 点自己,所以对任何 U ,都有 $U \cap S_0 = \{0\}$ 。但是我们知道 U 上确实存在其它与 $x=0$ 不可区分的点,它们不在 $U \cap S_p^0$ 上。

9.5.3 全局分解时的全状态能观秩条件

把第6章的局部能观定义具体用于系统式(9-18),有以下的定义。

定义 9.18 如果对控制系统式(9-18)的每个初始状态 $p^0 \in N$,都可找到一个 p^0 的邻域 U , U 中每一点在分段不变输入下都可与 p^0 相区别,则称系统式(9-18)是在 N 上局部能观的(locally observable on N)。

定理 9.24 控制系统式(9-18)在 N 上局部全状态能观的一个充分条件是,对所有 $p \in N$ 有

$$\dim \Omega_O(p) = n \quad (9-19)$$

证明 如果 $\dim \Omega_O(p) = n$, 则 Ω_O 和 Ω_O^\perp 是非奇异的,因而 Ω_O^\perp 是局部有限生成的,有最大积分子流形特性。 Ω_O^\perp 的维数为零说明没有点不能与 p^0 相区别,按定义 9.10,系统是局部全状态能观的。得证。

定义 9.19 控制系统式(9-18)如在每点 $p^0 \in N$ 满足

$$\dim \Omega_O(p^0) = n \quad (9-20)$$

则称系统在全 N 上满足全状态能观秩条件(observability rank condition)。

9.5.4 线性系统的全局分解

9.5.4.1 线性系统的全局能控分解

例 9.6 (线性系统的全局能控分解)线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = Ax + Bu = Ax + \sum_{i=1}^m b_i u_i \\ y &= h(x) = Cx \quad y_i = h_i(x) = c_i x \quad i=1, \dots, l \end{aligned}$$

首先,找控制李代数 C 。控制李代数 C 是 $V(N)$ 中包含 f, g_1, \dots, g_m 的最小子代数,即包含 Ax, b_1, \dots, b_m 的最小子代数。下面将证明控制李代数 C 等于一个以实数为系数的线性组合,即

$$C = LC(\{Ax\} \cup \{A^k b_i : 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n-1\}) \quad (9-21)$$

也就是证明该线性组合是包含 Ax, b_1, \dots, b_m 的最小子代数。对此,看到集合

$$\{Ax\} \cup \{A^k b_i : 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n-1\} \quad (9-22)$$

中包含着 Ax, b_1, \dots, b_m , 即 f, g_1, \dots, g_m , 还可见该集合又被包含在控制李代数 C 中,因为其元素 $A^k b_i$ 中任何一个都是 f, g_1, \dots, g_m 的重复李括号,即

$$A^k b_i = (-1)^k \text{ad}_f^k g_i \quad (9-23)$$

这样,如果线性组合还是封闭的,即式(9-22)集合各元素在李括号下是封闭的,则该线性组合就是一个李代数。为证明线性组合是封闭的,使向量场 $\tau_1(x), \tau_2(x)$ 取各种可能的形式:

(1) $\tau_1(x) = A^k b_i, \tau_2(x) = A^k b_j$, 这时 $[\tau_1, \tau_2] = 0$ 。

(2) $\tau_1(x) = A^k b_i, \tau_2(x) = Ax$, 这时 $[\tau_1, \tau_2] = A^{k+1} b_i$ 。如果 $k < n-1$, 则 $[\tau_1, \tau_2]$ 在式

(9-22)集合内;如果 $k = n - 1$, 由 Cayley - Hamilton 定理, A^n 可用低阶矩阵线性表示, 则 $[\tau_1, \tau_2]$ 仍在式(9-22)集合内。

(3) $\tau_1(x), \tau_2(x)$ 都是式(9-22)集合, 这时 $[\tau_1, \tau_2]$ 仍在式(9-22)集合内。

综上所述, 式(9-21)右端线性组合是一个包含 f, g_1, \dots, g_m 并被包含于 C 的李代数。同时, 线性组合的基底已经最小, 故线性组合与控制李代数重合。式(9-21)成立, 该式右端就是所求控制李代数。

其次, 定义与 C 相当的分布 Δ_C 。在 $x \in R^n$ 定义

$$\begin{aligned}\Delta_C(x) &= \text{span}\{Ax\} + \text{span}\{A^k b_i : 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n-1\} \\ &= \text{span}\{Ax\} + \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(A^k B)\end{aligned}\quad (9-24)$$

再次, 求分布 P 。

$$P(x) = \text{span}\{A^k b_i : 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n-1\} = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(A^k B)$$

可见

$$\Delta_C(x) = \text{span}\{f\} + P$$

再其次, 分布 Δ_C 和 P 有最大积分子流形特性。因为 Δ_C 是由局部有限生成的向量场集合张成的, 所以有最大积分子流形特性。分布 P 是非奇异和对合的, 由推论 9.6, P 有最大积分子流形特性。

最后, 求最大积分子流形。因分布 P 非奇异, 其最大积分子流形全都同维。因为分布 Δ_C 可能奇异, 所以各最大积分子流形可能有不同的维数。

如果在某点 $x \in R^n$ 处, $f(x) \in P(x)$, 则分布 Δ_C 和 P 过点 x 的最大积分子流形彼此重合; 否则, 分布 Δ_C 过点 x 的最大积分子流形比分布 P 过点 x 的最大积分子流形高 1 维。

9.5.4.2 线性系统的全局能观分解

例 9.7 (线性系统的全局能观分解) 线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = Ax + Bu = Ax + \sum_{i=1}^m b_i u_i \\ y &= h(x) = Cx \quad y_i = h_i(x) = c_i x \quad i = 1, \dots, l\end{aligned}$$

首先, 找观察空间 O 。观察空间 O 是 $C^\infty(N)$ 中包含函数 h_1, \dots, h_l 的最小子空间, 即包含 $c_1 x, \dots, c_l x$ 的最小子空间。下面将证明观察空间 O 等于一个以实数为系数的线性组合, 即

$$O = LC(\{\lambda \in C^\infty(N) : \lambda(x) = c_i A^k x \text{ 或 } \lambda(x) = c_i A^k b_j; 1 \leq i \leq l, 0 \leq k \leq n-1\}) \quad (9-25)$$

注意其中 $c_i A^k x, c_i A^k b_j$ 是按下列关系求得的:

$$\begin{aligned}c_i A^k x &= L_f^k h_i(x) \\ c_i A^k b_j &= L_{g_j} L_f^k h_i(x)\end{aligned}\quad (9-26)$$

也就是证明该线性组合是包含 h_1, \dots, h_l , 即包含 $c_1 x, \dots, c_l x$ 的最小子空间。对此, 看到集合

$$\lambda(x) = c_i A^k x \text{ 或 } \lambda(x) = c_i A^k b_j; 1 \leq i \leq l, 0 \leq k \leq n-1 \quad (9-27)$$

中包含着 $c_1 x, \dots, c_l x$, 即 h_1, \dots, h_l , 还可见该集合又被包含在观察空间 O 中, 因为其元素

$c_i A^k b_j$ 中任何一个都是 h_1, \dots, h_l 对 f, g_1, \dots, g_m 的重复李导数, 即

$$c_i A^k b_j = L_{g_j} L_f^k h_i(x)$$

这样, 如果线性组合还是封闭的, 即式(9-27)集合各元素在李导数下是封闭的, 则线性组合式(9-25)就是一个观察空间。为证明线性组合是封闭的, 使函数 $\lambda(x)$ 取各种可能的形式:

(1) $\lambda(x) = c_i A^k b_j$, 这时 $L_f \lambda(x) = L_{g_j} \lambda(x) = 0$;

(2) $\lambda(x) = c_i A^k x$, 这时 $L_f \lambda(x) = c_i A^{k+1} x$, $L_{g_j} \lambda(x) = c_i A^k b_j$ 。如果 $k < n-1$, 则 $L_f \lambda(x)$ 在式(9-27)集合内; 如果 $k = n-1$, 由 Cayley-Hamilton 定理, A^n 可用低阶矩阵线性表示, 则 $L_f \lambda(x)$ 仍在式(9-27)集合内。

(3) $\lambda(x)$ 是(9-27)集合, 这时 $L_f \lambda(x)$ 仍在(9-27)集合内。

综上所述, 式(9-25)右端线性组合是一个包含 h_1, \dots, h_l 并被包含于观察空间 O 的子空间。同时, 线性组合的基底已经最小, 故线性组合与观察空间重合。式(9-25)成立, 该式右端就是所求观察空间。

其次, 定义与观察空间 O 相当的对偶分布 Ω_O 。在 $x \in R^n$ 定义

$$\Omega_O(x) = \text{span}\{c_i A^k : 1 \leq i \leq l, 0 \leq k \leq n-1\} \quad (9-28)$$

可看到对偶分布 Ω_O 是非奇异的。注意到例 5.2, 相应地可得到

$$\Omega_O^\perp(x) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k) \quad (9-29)$$

由定理 9.19, 得

$$\Omega_O^\perp(x) = Q(x)$$

再其次, 因为分布 Ω_O^\perp 和 Q 都是非奇异和对合的, 由推论 9.6, 分布 Ω_O^\perp 和 Q 有最大积分子流形特性。

最后, 求最大积分子流形。在本例中, 因为分布 Ω_O^\perp 和 Q 都非奇异, 所以其各最大积分子流形全都同维。

第 10 章 输入输出解耦

本章讨论输入输出解耦问题。10.1 节定义了输出对输入的不变性,建立了非线性系统输出对输入不变性的基本充要条件。在此基础上,又给出了以观察空间表达的输出对输入不变性的充要条件和以不变分布表达的输出对输入有不变性的充要条件。10.2 节基于以观察空间表达的输出对输入有不变性的充要条件给出了输入输出解耦定理。

10.1 输出对输入的不变性

10.1.1 输出对输入有不变性的定义

本节意在建立输出不受输入影响的条件,希望这些条件能用于分析和处理扰动解耦和输出输入通道解耦问题。研究多人多出非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (10-1a)$$

$$y_j = h_j(x) \quad 1 \leq i \leq p \quad (10-1b)$$

定义 10.1 记输出 y_j 在时刻 t 之值为 $y_j(t; x^0; u_1, \dots, u_m)$ 。输出 y_j 不受输入 u_i 影响,或说输出 y_j 在输入 u_i 下不变(output y_j is invariant under input u_i),是指对所有 t ,所有初始状态 $x^0 \in U$ 和所有输入函数集合 $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m$,对每个输入函数 v^a 和 v^b 满足

$$y_j(t; x^0; u_1, \dots, u_{i-1}, v^a, u_{i+1}, \dots, u_m) = y_j(t; x^0; u_1, \dots, u_{i-1}, v^b, u_{i+1}, \dots, u_m) \quad (10-2)$$

10.1.2 输出对输入有不变性的基本充要条件

10.1.2.1 非线性系统输出对输入有不变性的基本充要条件

引理 10.1 输出 y_j 不受输入 u_i 影响,当且仅当

$$L_{g_i} h_j(x) = 0 \quad (10-3a)$$

$$L_{g_i} L_{\tau_1} \cdots L_{\tau_r} h_j(x) = 0 \quad (10-3b)$$

对所有 $r \geq 1$,对在集合 $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ (注:实际上此集合可去掉 g_i 而改写为 $\{f, g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_m\}$) 中任意选择的向量场 τ_1, \dots, τ_r ,和对所有 $x \in U$ 成立。式(10-3)也可等价地改写为

$$\langle dh_j, g_i \rangle(x) = 0 \quad (10-4a)$$

$$\langle dL_{\tau_{i_0}} \cdots L_{\tau_{i_k}} h_j, g_i \rangle(x) = 0 \quad (10-4b)$$

证明 本书从略,读者可参见文献[1]第125页,或文献[2]第117页。

10.1.2.2 线性系统输出对输入有不变性的基本充要条件

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m b_i u_i \quad (10-5a)$$

$$y_j = c_j x \quad 1 \leq j \leq p \quad (10-5b)$$

把引理10.1用于线性定常系统,可得以下引理。

引理10.2 输出 y_j 不受输入 u_i 影响,当且仅当

$$\begin{aligned} c_j b_i &= 0 \\ c_j A^k b_i &= 0 \quad \forall k \geq 1 \end{aligned} \quad (10-6)$$

10.1.3 以观察空间 O_j 表达的输出对输入有不变性的充要条件

10.1.3.1 观察空间 O_j

已经注意到第9章的定义9.16所定义的观察空间 O ,是针对 h_1, \dots, h_p 全体的,据此定义的

$$\Omega_O = \text{span}\{d\lambda : \lambda \in O\}$$

其中 O 包含函数 h_1, \dots, h_p ,也是针对全体的。因为本章的问题更关注个别的 h_j ,所以这里有必要进一步定义一个只包含 h_j 的观察空间 O_j 。

定义10.2 观察空间 O_j 是以光滑函数为元素的集合或空间,它包含 h_j ,并且对集合 $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ (注:实际上此集合可去掉 g_i 而改写为 $\{f, g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_m\}$) 中任意选择的向量场 τ_1, \dots, τ_r 的李导数

$$L_{\tau_{i_0}} \cdots L_{\tau_{i_k}} h_j \quad 0 \leq i_k \leq m \quad i_k \in I \quad 0 \leq k < \infty$$

保持封闭,且子空间最小。

定义10.3 以观察空间 O_j 为对象函数集定义一个全微分对偶分布,其定义为

$$\Omega_{O_j} = \text{span}\{d\lambda : \lambda \in O_j\} \quad (10-7)$$

称 Ω_{O_j} 为与观察空间 O_j 相当的对偶分布。

按定义, Ω_{O_j} 是由 dh_j 和 $dL_{\tau_{i_0}} \cdots L_{\tau_{i_k}} h_j, 0 \leq i_k \leq m, i_k \in I, 0 \leq k < \infty$ 张成的。

10.1.3.2 输出对输入不变性充要性定理

定理10.3 输出 y_j 不受输入 u_i 影响,当且仅当满足下列三个相互等价的条件之一:

$$(1) g_i \in \Omega_{O_j}^\perp; \quad (10-8a)$$

$$(2) \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Omega_{O_j}^\perp; \quad (10-8b)$$

$$(3) \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset (\text{span}\{dh_j\})^\perp. \quad (10-8c)$$

证明 首先,由基本充要条件式(10-3)证明(1)。式(10-3)可改写为

$$L_{g_i} h_j(x) = 0 \quad (10-9a)$$

$$L_{g_i} L_{g_{i_0}} \cdots L_{g_{i_k}} h_j(x) = 0 \quad (10-9b)$$

对所有 $k \geq 0$ 和所有 $x \in U$ 成立。式(10-4)可改写为

$$\langle dh_j, g_i \rangle(x) = 0 \quad (10-10a)$$

$$\langle dL_{g_{i_0}} \cdots L_{g_{i_k}} h_j, g_i \rangle(x) = 0 \quad (10-10b)$$

对所有 $k \geq 0$ 和所有 $x \in U$ 成立。显然, 式(10-10)等价于

$$g_i \in \Omega_{O_j}^\perp$$

其次, 由(1)证明(2)。由定理 9.18 知 Ω_O^\perp 在 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的, 因同样的理由, $\Omega_{O_j}^\perp$ 在 f, g_1, \dots, g_m 下是不变的。如果 $g_i \in \Omega_{O_j}^\perp$, 则 $\Omega_{O_j}^\perp$ 是包含 g_i , 在 f, g_1, \dots, g_m 下不变的分布。它包含最小分布, 得

$$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Omega_{O_j}^\perp$$

再次, 由(2)证(3)。因 $\text{span}\{dh_j\} \subset \Omega_{O_j}$, 所以 $\Omega_{O_j}^\perp \subset (\text{span}\{dh_j\})^\perp$ 。如果 $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Omega_{O_j}^\perp$, 则

$$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset (\text{span}\{dh_j\})^\perp$$

于是(3)得证。同时还可顺便得到以下结果。因对任意 $\tau_1 \in \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 有 $\text{span}\{dL_{\tau_1} h_j\} \subset \Omega_{O_j}$, 所以 $\Omega_{O_j}^\perp \subset (\text{span}\{dL_{\tau_1} h_j\})^\perp$ 。如 $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Omega_{O_j}^\perp$, 则

$$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset (\text{span}\{dL_{\tau_1} h_j\})^\perp \quad (10-11)$$

而且可一般地得到

$$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset (\text{span}\{dL_{\tau_k} \cdots L_{\tau_1} h_j\})^\perp \quad (10-12)$$

最后, 由(3)证(1)。分三步。第一步, 对任意 $\tau_1 \in \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$, 证明如(3)成立, 则 $g_i \in (\text{span}\{dL_{\tau_1} h_j\})^\perp$ 。按 $\langle f, g_1, g_2, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 定义, 形如 $[\tau_1, g_i]$ 的任何向量场必属于 $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 。如(3)成立, 即

$$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset (\text{span}\{dh_j\})^\perp \quad (10-13)$$

则

$$0 = \langle dh_j, [\tau_1, g_i] \rangle$$

注意到式(2-35), 此式可变化为

$$0 = \langle dh_j, [\tau_1, g_i] \rangle = \frac{\partial h_j}{\partial x} [\tau_1, g_i] = L_{[\tau_1, g_i]} h_j = L_{\tau_1} L_{g_i} h_j - L_{g_i} L_{\tau_1} h_j$$

实际上右端第一项为零, 这是因为式(10-13)说明

$$g_i \in (\text{span}\{dh_j\})^\perp$$

即

$$\langle dh_j, g_i \rangle = L_{g_i} h_j = 0$$

代入上式后得

$$L_{g_i} L_{\tau_1} h_j = 0$$

即

$$g_i \in (\text{span}\{dL_{\tau_1} h_j\})^\perp$$

第二步, 对任意 k 个向量场 $\tau_k, \dots, \tau_1 \in \langle f, g_1, \dots, g_m \rangle$, 证明 $g_i \in (\text{span}\{dL_{\tau_k} \cdots L_{\tau_1} h_j\})^\perp$ 。

先取 $\tau = \tau_1$, 按第一步的证法得 $g_i \in (\text{span}\{dL_{\tau_1} h_j\})^\perp$ 。随后用 τ_2 代替 τ_1 , 用 $L_{\tau_1} h_j$ 代替

h_j , 用式(10-11)代替式(10-13), 可得到 $g_i \in (\text{span}\{dL_{\tau_2} L_{\tau_1} h_j\})^\perp$ 。如此迭代 k 次, 最后得

$$g_i \in (\text{span}\{dL_{\tau_k} \cdots L_{\tau_1} h_j\})^\perp \quad (10-14)$$

第三步, 因为 O_j 是由形如 h_i 和 $L_{\tau_k} \cdots L_{\tau_1} h_j$, $\tau_i \in \{f, g_1, \cdots, g_m\}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq k < \infty$ 的函数的 R -线性组合构成, 所以, 由式(10-14), g_i 将消去 O_j 中任意函数的李导数, 即 $g_i \in \Omega_{O_j}^\perp$, 从而(1)得证。

10.1.3.3 以观察空间 O_j 表达的线性系统输出对输入不变性充要条件
对于线性定常系统来说

$$O_j = \{c_j A^k x \quad k \geq 0\} \quad (10-15)$$

$$\Omega_{O_j} = \text{span}\{c_j A^k \quad k \geq 0\} \quad (10-16)$$

$$\langle f, g_1, \cdots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle = \langle Ax, b_1, \cdots, b_m | \text{span}\{b_i\} \rangle = \text{span}\{A^k b_i : k \geq 0\} \quad (10-17)$$

定理 10.4 输出 y_j 不受输入 u_i 影响, 当且仅当满足下列三个相互等价的条件之一:

$$b_i \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(c_j A^k) \quad (10-18a)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(A^k b_i) \subset \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(c_j A^k) \quad (10-18b)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(A^k b_i) \subset \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(c_j) \quad (10-18c)$$

10.1.4 以不变分布 Δ 表达的输出对输入有不变性的充要条件

10.1.4.1 输出对输入有不变性的充要条件

定理 10.5 输出 y_j 不受输入 u_i 影响, 当且仅当存在同时具有以下二特性的分布 Δ :

(1) Δ 在 f, g_1, \cdots, g_m 下不变;

(2) $g_i \in \Delta \subset (\text{span}\{dh_j\})^\perp$ 。

证明 (充分性)由(1),(2)可知 Δ 满足

$$\langle f, g_1, \cdots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Delta \subset (\text{span}\{dh_j\})^\perp$$

此式满足式(10-8c), 故得证。

(必要性)如输出 y_j 不受输入 u_i 影响, 必满足式(10-8a), 即 $g_i \in \Omega_{O_j}^\perp$, 则可证 $\Omega_{O_j}^\perp$ 就是要找的 Δ , 因为已知 $\Omega_{O_j}^\perp$ 在 f, g_1, \cdots, g_m 下不变, 并被包含于 $(\text{span}\{dh_j\})^\perp$ 中。

10.1.4.2 以不变分布 Δ 表达的线性系统输出对输入不变性充要条件

定理 10.6 输出 y_j 不受输入 u_i 影响, 当且仅当存在同时具有以下二特性的分布 Δ :

(1) Δ 在 Ax 下不变;

(2) $b_i \in \Delta \subset \ker(c_j)$ 。

10.2 输出对输入的解耦

10.2.1 输出 y_j 对输入 u_i 解耦的系统分解

10.2.1.1 非线性系统输出 y_j 对输入 u_i 解耦的系统分解

定理 10.7 假设分布 $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 非奇异, 假设分布 $\Omega_{O_j}^\perp$ 非奇异, 如果 $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Omega_{O_j}^\perp$, 则在每点 $x \in U$ 附近可找到一坐标邻域, 在该邻域上非线性系统式(10-1)被局部表示为

$$\dot{\zeta}_1 = \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{k=1}^m \bar{g}_{1k}(\zeta_1, \zeta_2) u_k \quad (10-19a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \bar{f}_2(\zeta_2) + \sum_{k=1, k \neq i}^m \bar{g}_{2k}(\zeta_2) u_k \quad (10-19b)$$

$$y_j = h_j(\zeta_2) \quad (10-19c)$$

由定理表述可见, u_i 未出现, 因此 u_i 对 y_j 无任何影响。应用此定理, 如果 g_1, \dots, g_m 同时满足假设条件, 则可实现多通道解耦。即使 g_1, \dots, g_m 中个别不满足假设条件, 也可实现较理想的解耦。

证明 因为分布 $\Omega_{O_j}^\perp$ 非奇异, 所以由定理 5.10, $\Omega_{O_j}^\perp$ 对合, 并且由定理 9.19, 有

$$\Omega_{O_j}^\perp = Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_j\} \rangle^\perp$$

因为分布 $\Omega_{O_j}^\perp$ 满足 Q 分布分解定理 8.9 条件, 按该定理, 对每点 x^0 总可找到邻域 U_0 和定义在 U_0 的局部坐标变换 $z = \phi(x)$, 使在新坐标下, 系统式(10-1)可表示为

$$\dot{\zeta}_1 = \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{k=1}^m \bar{g}_{1k}(\zeta_1, \zeta_2) u_k \quad (10-20a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \bar{f}_2(\zeta_2) + \sum_{k=1}^m \bar{g}_{2k}(\zeta_2) u_k \quad (10-20b)$$

$$y_j = h_j(\zeta_2) \quad (10-20c)$$

式中, $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_s), \zeta_2 = (z_{s+1}, \dots, z_n)$ 。

因为已知分布 $\Delta = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle \subset \Omega_{O_j}^\perp$, 满足引理 10.3 的(3), 所以输出 y_j 不受输入 u_i 影响, 并且 $g_i \in \Omega_{O_j}^\perp$ 。因为在分布 $\Omega_{O_j}^\perp$ 内部的向量场在做上述坐标变换 $z = \phi(x)$ 后满足简化式(8-2), 所以 g_i 在坐标变换后得

$$\bar{g}_i(z) = (\bar{g}_1(z) \cdots \bar{g}_s(z) \ 0 \cdots 0)^T$$

即

$$\bar{g}_i(z) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{1i}(z) \\ \bar{g}_{2i}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

这说明了式(10-19b)中加 $k \neq i$ 的原因。证毕。

应说明的是, 因为分布 $\Omega_{O_j}^\perp = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 非奇异, 所以由定理 5.5,

$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 对合, 即 $[f, g_i] \in \text{span}\{g_i\}, [g_1, g_i] \in \text{span}\{g_i\} \dots, [g_m, g_i] \in \text{span}\{g_i\}$ 。这说明 $[f, g_i], [g_1, g_i], \dots, [g_m, g_i]$ 都和 g_i 一样在分布 $\Omega_{O_j}^\perp$ 内部。它们也都类似 g_i 有 $\bar{g}_{2i}(z)=0$, 保证 u_i 对 y_j 无任何影响。

10.2.1.2 线性系统输出 y_j 对输入 u_i 解耦的系统分解

研究线性定常系统情况下的系统分解, 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m b_i u_i \quad (10-21a)$$

$$y_j = c_j x \quad (10-22b)$$

$$O_j = \{c_j A^k x \quad k \geq 0\} \quad (10-22)$$

$$\Omega_{O_j} = \text{span}\{c_j A^k \quad k \geq 0\} \quad (10-23)$$

$$\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle = \langle Ax, b_1, \dots, b_m | \text{span}\{b_i\} \rangle = \text{span}\{A^k b_i : k \geq 0\} \quad (10-24)$$

定理 10.8 假设分布 $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_i\} \rangle$ 非奇异, 假设分布 $\Omega_{O_j}^\perp$ 非奇异, 如果

$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(A^k b_i) \subset \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(c_j A^k)$, 则线性系统式(10-21)可表示为

$$\dot{\xi}_1 = \bar{A}_{11} \xi_1 + \bar{A}_{12} \xi_2 + \sum_{k=1}^m \bar{b}_{1k} u_k \quad (10-25a)$$

$$\dot{\xi}_2 = \bar{A}_{22} \xi_2 + \sum_{k=1, k \neq 1}^m \bar{b}_{2k} u_k \quad (10-25b)$$

$$y_j = c_{j2} \xi_2 \quad (10-25c)$$

由定理表述可见, u_i 未出现, 因此 u_i 对 y_j 无任何影响。应用此定理, 如果 b_1, \dots, b_m 同时满足假设条件, 则可实现多通道解耦。即使 b_1, \dots, b_m 中个别不满足假设条件, 也可实现较理想的解耦。

第 11 章 单入单出系统的坐标变换和部分线性化

本章和下一章共同构成单入单出非线性系统精确线性化的完整过程。为使层次更清楚,这两章的功能按下面的原则进行划分:第 11 章覆盖有关坐标变换的内容;第 12 章覆盖有关状态反馈的内容。因为第 12 章在后,所以精确线性化所得到的总的结果将出现在第 12 章。

本章 11.1 节定义了单入单出非线性系统的相对阶。这是贯穿本书后续各章几乎所有章节的重要概念,也是非线性系统几何方法最重要的概念之一。11.2 节提供了精确线性化要使用的基础坐标变换函数集,证明了相对阶在以上坐标变换下保持不变。11.3 节讨论了系统通过坐标变换达到部分线性化的方法,最后得到非线性系统的正则形式表示和准正则形式表示。

第 6 章 6.4 节所讨论的坐标变换是一般意义上的变换,更具一般性;本章所讨论的坐标变换则是只针对 11.2 节提出的一组特定坐标变换函数的坐标变换。

11.1 单入单出系统的相对阶

11.1.1 相对阶的定义

正则形式是系统方程的一种特定表达形式。系统的性质和本质在正则形式下能得到更明显的展示,既便于对不同的系统进行比较,也便于用统一的方法进行分析和综合。因此,作为研究、分析和综合的第一步,一般都设法先把系统方程变换为正则形式或准正则形式。

系统的状态方程在不同的坐标系下会有不同的形式。通过一般的非线性坐标变换可得到多种多样的形式。同样,得到正则形式或准正则形式也要通过坐标变换来达到。坐标变换是使系统变换为正则形式或准正则形式的一种手段。

正则形式或准正则形式一般是部分线性化的。一个系统通过坐标变换到底有多大部分能被线性化取决于系统的相对阶。相对阶是反映系统本质的一个重要特征,所以我们的讨论将从相对阶开始。

按由简及繁的原则,本章从单入单出系统入手,将多人多出问题放在后面讨论。单入单出系统的分析具有基础性质,有关的理论结果将被推广到多人多出系统中去。

本章的单入单出系统和后面章节的多人多出系统都是针对局域进行的。要注意的是局域并不意味着一定很小,有时它很小,有时它也可能大到全局。局域的大小随所讨论的具体问题可能有很大不同。

定义 11.1 对单入单出非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (11-1a)$$

$$y = h(x) \quad (11-1b)$$

来说,在点 x^0 处有相对阶(relative degree) r 是指存在一个正整数 r ,它满足以下两个条件:

(1)存在点 x^0 一邻域,对其中所有 x 和所有 $0 \leq k < r-1$ 有 $L_g L_f^k h(x) = 0$;

(2)对点 x^0 有 $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ 。

为求相对阶,按此定义,应当从 $k=0$ 开始检查 $L_g L_f^k h(x)$ 值,直到它不为零时为止。把 $L_g L_f^k h(x)$ 首次不为零时的 k 值加 1 就是相对阶 r 的值。特别提请注意的是,条件(1)要求在 x^0 一邻域上的每一点满足,而条件(2)只要求在 x^0 一点上满足。

例 11.1 (有相对阶)求下面系统的相对阶。

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) + g(x)u &= \begin{bmatrix} x_2 \\ (1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = h(x) &= x_1 \end{aligned}$$

$k=0$ 时,有

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$k=1$ 时,有

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ (1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g(x) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

因此,系统在任意的 x^0 点有相对阶 $r=2$ 。

例 11.2 (相对阶在某些线上无定义)求下面系统的相对阶。

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) + g(x)u &= \begin{bmatrix} x_2 \\ (1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = h(x) &= \sin x_2 \end{aligned}$$

$k=0$ 时,有

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = [0 \ \cos x_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \cos x_2$$

可见当 $x_2 \neq (2l+1)\pi/2$ 时,相对阶 $r=1$ 。当 $x_2 = (2l+1)\pi/2$ 时, $L_g h(x) = 0$, 似乎还可算下去,但实际上这是不必要的,算下去并无意义。因为这是一些平行于 x_1 轴的线,找不到二维的邻域,使在邻域上满足 $L_g h(x) = 0$ 。结论是:在 $x_2 \neq (2l+1)\pi/2$ 的区域上,相对阶 $r=1$;在 $x_2 = (2l+1)\pi/2$ 的点上,相对阶无意义。

例 11.3 (相对阶无定义)求下面系统的相对阶。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

$k=0$ 时,有

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$k=1$ 时,有

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} f(x) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x^T} g(x) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$k=2$ 时,有

$$L_g L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x^T} g(x) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

这样一直做下去,一直为零,即在 x^0 邻域,对所有 $k \geq 0$ 有 $L_g L_f^k h(x) = 0$ 。因此, x^0 点相对阶无定义。观察系统方程可以发现,造成这一结果的原因是,此系统的输出 y 是不能控的, y 不受输入控制 u 的任何影响,或说 y 不能表示为 u 的函数。

11.1.2 相对阶的意义

11.1.2.1 线性系统的相对阶等于传递函数的分母多项式和分子多项式阶数之差 求线性系统相对阶

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u = Ax + Bu \\ y &= h(x) = Cx \end{aligned}$$

$k=0$ 时,有

$$L_g h(x) = CB$$

$k=1$ 时,有

$$L_f h(x) = CAx \quad L_g L_f h(x) = CAB$$

...

$k=k$ 时,有

$$L_f^k h(x) = CA^k x \quad L_g L_f^k h(x) = CA^k B$$

用 r 表示分母多项式和分子多项式阶数之差,把传递函数 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 展开,可得

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + b_{n-r} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

矩阵 A 、向量 B, C 与多项式系数 $a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{n-r}$ 的关系为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可算得 $k=r-2$ 时,有

$$L_f^{r-2} h(x) = CA^{r-2} x \quad L_g L_f^{r-2} h(x) = CA^{r-2} B = 0$$

$k=r-1$ 时,有

$$L_f^{r-1} h(x) = CA^{r-1} x \quad L_g L_f^{r-1} h(x) = CA^{r-1} B \neq 0$$

可见线性系统的相对阶等于传递函数的分母多项式和分子多项式阶数之差。

11.1.2.2 一般非线性系统的相对阶等于为了明确出现 $u(t)$ 需对 $y(t)$ 求导的次数
 设系统式(11-1)相对阶为 r , 某时刻 t^0 相应的状态为 x^0 。让我们计算导数

$$y^{(l)}(t)|_{t=t^0} \quad l=0,1,2,\dots$$

$l=0$ 时,有

$$y(t^0) = h(x(t^0)) = h(x^0)$$

可见 $u(t^0)$ 未出现; $l=1$ 时,有

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)] \\ &= L_f h(x(t)) + L_g h(x(t))u(t) \end{aligned}$$

设相对阶 $r>1$, 在 x^0 邻域必有 $L_g h(x(t)) = L_g L_f^0 h(x(t)) = 0$, 于是在 x^0 邻域有

$$y^{(1)}(t) = L_f h(x(t))$$

可见 $u(t^0)$ 未出现; $l=2$ 时,有

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)] \\ &= L_f^2 h(x(t)) + L_g L_f h(x(t))u(t) \end{aligned}$$

设相对阶 $r>2$, 在 x^0 邻域必有 $L_g L_f h(x(t)) = 0$, 得在 x^0 邻域有

$$y^{(2)}(t) = L_f^2 h(x(t))$$

...

可见 $u(t^0)$ 未出现; $l=r$ 时,有

$$y^{(r)}(t^0) = L_f^r h(x^0) + L_g L_f^{r-1} h(x^0)u(t^0)$$

因 $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$, $u(t^0)$ 已出现, 可见当求导次数 $l < r$ 时, 在 x^0 邻域, $y^{(l)}(t) = L_f^l h(x(t))$, $u(t^0)$ 不出现。当求导次数恰好为 $l=r$ 时, $u(t^0)$ 明确出现。

11.2 基于线性化坐标 $L_f^k h(x^0)$ 的坐标变换映射

11.2.1 全微分对偶向量 $dL_f^k h(x^0)$ ($k=0,1,\dots,r-1$) 是线性独立的

11.2.1.1 一个恒等式

引理 11.1 设 $\phi(x)$ 是一个实值函数, f, g 是向量场, 都定义在 R^n 的一个开集 U 上, 则对任选的正整数 $s, m, k \geq 0$, 有

$$\langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{m+k} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \quad (11-2)$$

此外, 作为一个结果, 下面两组条件是等价的:

$$(1) L_g \phi(x) = L_g L_f \phi(x) = \dots = L_g L_f^k \phi(x) = 0 \quad (\text{对所有 } x \in U) \quad (11-3a)$$

$$(2) L_g \phi(x) = L_{\text{ad}_f g} \phi(x) = \dots = L_{\text{ad}_f^k g} \phi(x) = 0 \quad (\text{对所有 } x \in U) \quad (11-3b)$$

式中

$$\binom{r}{i} = C_r^i = \frac{r!}{i! (r-i)!}$$

证明 (数学归纳法) $k=0$ 时, 式(11-2)化为

$$\langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle = \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle$$

可见等式成立。 $k=1$ 时, 式(11-2)化为

$$\langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{m+1} g(x) \rangle = L_f \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle - \langle dL_f^{s+1} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle$$

引用式(2-38)公式 12, 可见等式成立。 设等式在 $k=k-1$ 时成立, 证明 $k=k$ 时成立, 即已知式(11-4)成立, 证明式(11-2)成立。

$$\langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{m+k-1} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} L_f^{k-i-1} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \quad (11-4)$$

在证明之前, 注意式(11-4)作为已知恒等式, 当以 $s+1$ 取代其中 s 时, 一样成立, 即

$$\langle dL_f^{s+1} \phi(x), \text{ad}_f^{m+k-1} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} L_f^{k-i-1} \langle dL_f^{s+i+1} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \quad (11-5)$$

下面开始证明。 从式(11-2)右端出发, 证明它等于左端。 首先, 把式(11-2)右端拆成 $i=0, i=1 \sim k-1, i=k$ 三部分, 以后把组合系数按公式 $C_k^i = C_{k-1}^i + C_{k-1}^{i-1}$ 拆开, 得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &= L_f^k \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &\quad + (-1)^k \langle dL_f^{s+k} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &= L_f^k \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i-1} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &\quad + (-1)^k \langle dL_f^{s+k} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \end{aligned}$$

前两项提出 L_f 后合并, 并运用式(11-4), 后两项合并在一起, 并作变量 i 代换, 得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= L_f \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} L_f^{k-i-1} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k-1}{i-1} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \\ &= L_f \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{m+k-1} g(x) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{k-1}{i} L_f^{k-i-1} \langle dL_f^{s+i+1} \phi(x), \text{ad}_f^m g(x) \rangle \end{aligned}$$

由式(11-5)得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= L_f \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{m+k-1} g(x) \rangle - \langle dL_f^{s+1} \phi(x), \text{ad}_f^{m+k-1} g(x) \rangle \\ &= \langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{m+k} g(x) \rangle \end{aligned}$$

故 $k=k$ 时式(11-2)成立。

下面着手证明式(11-3)。 由式(11-2), 取其中 $m=s=0$, 得

$$\langle d\phi(x), \text{ad}_f^k g(x) \rangle = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} \langle L_f^i \phi(x), g(x) \rangle \quad (11-6)$$

此式可改写为

$$L_{\text{ad}_f^k g} \phi(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} L_f^i \phi(x) \quad (11-7)$$

当 k 取不同值时, 式(11-7)两端的结果如下。

$k=0$ 时, 有

$$L_g \phi(x) = L_g \phi(x)$$

$k=1$ 时, 有

$$L_{\text{ad}_f g} \phi(x) = L_f L_g \phi(x) - L_g L_f \phi(x)$$

$k=2$ 时, 有

$$L_{\text{ad}_f^2 g} \phi(x) = L_f^2 L_g \phi(x) - 2L_g L_f \phi(x) + L_g L_f^2 \phi(x)$$

...

故式(11-3)两组条件等效。其中一组条件成立时, 可推得另一组条件成立。引理 11.1 证毕。

11.2.1.2 全微分对偶向量线性独立引理

引理 11.2 对系统式(11-1), 以下各全微分对偶向量是线性独立的。

$$dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$$

证明 对恒等式(11-2), 作变量代换 $s \rightarrow j, k \rightarrow i, i \rightarrow l, \phi(x) \rightarrow h(x)$, 并取 $m=0$, 得简化恒等式

$$\begin{aligned} \langle dL_f^j h(x), \text{ad}_f^i g(x) \rangle &= \sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{i}{l} L_f^{i-l} \langle dL_f^{j+l} h(x), g(x) \rangle \\ &= \sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{i}{l} L_f^{i-l} L_g L_f^{j+l} h(x) \end{aligned}$$

由相对阶定义, 当对所有 l 满足 $j+l < r-1$, 即 $j+i < r-1$ 时, 此式右端对所有 x^0 邻域的 x 等于零, 从而

$$\langle dL_f^j h(x), \text{ad}_f^i g(x) \rangle = 0 \quad j+i < r-1 \quad (11-8a)$$

当 $j+i = r-1$ 时, 简化恒等式右端只有 $l=i$ 的一项不为零, 在 x^0 成为

$$\langle dL_f^j h(x^0), \text{ad}_f^i g(x^0) \rangle = (-1)^i L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0 \quad (11-8b)$$

分别使 $i, j = 0 \sim r-1$ 构成一矩阵, 得

$$\begin{bmatrix} dh(x^0) \\ dL_f h(x^0) \\ \vdots \\ dL_f^{r-2} h(x^0) \\ dL_f^{r-1} h(x^0) \end{bmatrix} [g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{r-2} g(x^0) \quad \text{ad}_f^{r-1} g(x^0)]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \langle dh, g \rangle & \langle dh, \text{ad}_f g \rangle & \cdots & \langle dh, \text{ad}_f^{r-2} g \rangle & \langle dh, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \\ \langle dL_f h, g \rangle & \langle dL_f h, \text{ad}_f g \rangle & \cdots & \langle dL_f h, \text{ad}_f^{r-2} g \rangle & \langle dL_f h, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle dL_f^{r-2} h, g \rangle & \langle dL_f^{r-2} h, \text{ad}_f g \rangle & \cdots & \langle dL_f^{r-2} h, \text{ad}_f^{r-2} g \rangle & \langle dL_f^{r-2} h, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \\ \langle dL_f^{r-1} h, g \rangle & \langle dL_f^{r-1} h, \text{ad}_f g \rangle & \cdots & \langle dL_f^{r-1} h, \text{ad}_f^{r-2} g \rangle & \langle dL_f^{r-1} h, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \end{bmatrix}_{x^0} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle dh, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle dL_f h, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle dL_f^{r-2} h, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \\ \langle dL_f^{r-1} h, g \rangle & \langle dL_f^{r-1} h, \text{ad}_f g \rangle & \cdots & \langle dL_f^{r-1} h, \text{ad}_f^{r-2} g \rangle & \langle dL_f^{r-1} h, \text{ad}_f^{r-1} g \rangle \end{bmatrix}_{x^0} \quad (11-9)
\end{aligned}$$

根据式(11-8b)知,此矩阵最右一列和最下一行各元素均不为零,这说明向量 $g(x^0)$, $\text{ad}_f g(x^0), \dots, \text{ad}_f^{r-1} g(x^0)$ 和对偶向量 $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$ 中每一个都不是零向量。此式第一列表明做点积的向量 g 和对偶向量 $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-2} h(x^0)$ 分别正交,只和 $dL_f^{r-1} h(x^0)$ 不正交。其它列有类似的关系。矩阵最右一列和最下一行各元素均不为零,还说明矩阵是秩为 r 的满秩阵。这是因为当动态地看过 x^0 瞬时的向量和对偶向量值时,各行和各列不是线性相关的。因矩阵各行是线性独立的,可推得结论:向量 $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$ 是彼此线性独立的。

11.2.2 以 $L_f^k h(x^0)$ 构成坐标变换函数集

推论 11.3 n 阶系统式(11-1)的相对阶 $r \leq n$ 。

证明 n 阶系统中彼此线性独立的向量个数最多达到 n 个。因引理 11.2 已证明相对阶为 r 的系统线性独立的全微分对偶向量个数为 r 个,所以可推得 n 阶系统式(11-1)的相对阶 r 必定满足 $r \leq n$ 。

引理 11.2 已证明相对阶为 r 的系统在 x^0 点有 r 个线性独立的全微分对偶向量 $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$ 。如果 $r = n$,此独立性可保证

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= h(x) \\
\phi_2(x) &= L_f h(x) \\
&\vdots \\
\phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x)
\end{aligned}$$

在 x^0 点邻域上的 Jacobi 阵非奇异,并构成一局部微分同胚变换。如果 $r \neq n$,也可以以此 r 个函数 $h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x)$ 为基础构成用于 x^0 点邻域的坐标变换映射。下面的定理指出了构成这一坐标变换映射的方法。

定理 11.4 设系统在 x^0 有相对阶 r ,取

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= h(x) \\
\phi_2(x) &= L_f h(x) \\
&\vdots \\
\phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x)
\end{aligned} \quad (11-10)$$

如果 r 严格小于 n ,总可再找 $n-r$ 个附加函数 $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$,使映射

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 有一个非奇异的 Jacobi 阵, 从而使 $\phi(x)$ 在 x^0 邻域可以构成一个局部坐标变换。其中附加函数不但在 x^0 的值可以任意选择, 而且总可以选择得使 $\phi_i(x)$ 对所有 $r+1 \leq i \leq n$, 在 x^0 邻域的各点 x 满足

$$L_g \phi_i(x) = 0 \quad (11-11)$$

证明 要证明的内容有三个: (1) 可以找到 $n-r$ 个函数; (2) 附加函数在 x^0 的值可以任意选择; (3) 总可使 $L_g \phi_i(x) = 0$ 。首先证明(1)。按相对阶定义, $g(x^0)$ 非零, 因此在 x^0 附近分布 $G = \text{span}\{g\}$ 是非奇异的。因为它只有 1 阶, 所以 G 还是对合的。由 Frobenius 定理, 存在 $n-1$ 个定义在 x^0 一邻域上的函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-1}(x)$, 使

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1}\} = G^\perp \quad (11-12)$$

因为按相对阶定义, g 和对偶向量 $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-2} h(x^0)$ 间分别正交, 只和 $dL_f^{r-1} h(x^0)$ 不正交。如设

$$\Omega = \text{span}\{dL_f^k h : 0 \leq k \leq r_i - 1\}$$

则在 x^0 必有

$$g(x^0) \cap \Omega^\perp(x^0) = 0$$

事实上, 如果不是这样, 则 $g(x^0)$ 必属于 $\Omega^\perp(x^0)$ 。它应当零化 $\Omega(x^0)$ 中的所有向量, 包括

$$dL_f^{r-1} h(x^0) g = 0$$

而这与相对阶定义

$$a(x^0) = L_g L_f^{r-1} h(x^0) = dL_f^{r-1} h(x^0) g(x^0) \neq 0$$

相矛盾。式 $g(x^0) \cap \Omega^\perp(x^0) = 0$ 的成立意味着

$$\dim(G^\perp(x^0) + \Omega(x^0)) = \dim(G^\perp + \text{span}\{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{r-1} h\}) = n \quad (11-13)$$

此式说明在 G^\perp 中, 即 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1}$ 中可找到补齐 n 维的对偶向量场和相应的函数。不失一般性, 把找到的 $n-r$ 个函数记为

$$\begin{aligned} \phi_{r+1}(x) &= \lambda_1(x) \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= \lambda_{n-r}(x) \end{aligned} \quad (11-14)$$

它们能做到使 $dh, dL_f h, \dots, dL_f^{r-2} h, d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}$ 彼此线性独立。其次证明(2)。任何其它形如 $\lambda'_i(x) = \lambda_i(x) + c_i$ (c_i 是常数) 的函数都满足(1)的要求, 因此, 这些函数在 x^0 的值可任意选择。最后证明(3)。可选择 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$, 使 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}$ 都分别与向量 g 正交, 即对 x^0 邻域的 x 和 $1 \leq i \leq n-r$ 都满足

$$\langle d\lambda_i(x), g(x) \rangle = L_g \lambda_i(x) = 0$$

定理证毕。

把定理 11.4 的结果式(11-10)加上式(11-14), 集中写在一起, 就是所要求的结果

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= h(x) \\
\phi_2(x) &= L_f h(x) \\
&\vdots \\
\phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x) \\
\phi_{r+1}(x) &= \lambda_1(x) \\
&\vdots \\
\phi_n(x) &= \lambda_{n-r}(x)
\end{aligned} \tag{11-15}$$

或简写为

$$z_i = \phi_i(x) \quad (1 \leq i \leq n) \tag{11-16}$$

11.2.3 相对阶在坐标变换下保持不变

将 $f(x), g(x), h(x)$ 在坐标变换之后用 $\bar{f}(z), \bar{g}(z), \bar{h}(z)$ 表示, 即令

$$\begin{aligned}
\bar{f}(z) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
\bar{g}(z) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
\bar{h}(z) &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} h(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}
\end{aligned}$$

然后考察系统相对阶在坐标变换前后是否相等。注意到相对阶定义, 考察相对阶在坐标变换前后是否变化, 只要分别考察 $L_{\bar{g}}\bar{h}(z), L_{\bar{f}}\bar{h}(z), L_{\bar{g}}L_{\bar{f}}^k\bar{h}(z)$ 等与坐标变换前的 $L_g h(z), L_f h(z), L_g L_f^k h(z)$ 等是否保持一致。按此要求可推得

$$\begin{aligned}
L_{\bar{g}}\bar{h} &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial z^T} \bar{g}(z) = \frac{\partial}{\partial z^T} (h(x) |_{x=\phi^{-1}(z)}) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^T} h(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} g(x) |_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[\frac{\partial h}{\partial x^T} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = [L_g h(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
L_{\bar{f}}\bar{h}(z) &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial z^T} \bar{f}(z) = \frac{\partial}{\partial z^T} (h(x) |_{x=\phi^{-1}(z)}) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^T} h(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \frac{\partial x}{\partial z^T} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} f(x) |_{x=\phi^{-1}(z)} \\
&= \left[\frac{\partial h}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = [L_f h(x)]_{x=\phi^{-1}(z)}
\end{aligned}$$

作类似的计算, 可得

$$L_{\bar{g}}L_{\bar{f}}^k\bar{h}(z) = [L_g L_f^k h(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} = L_g L_f^k h(\phi^{-1}(z))$$

在作进一步分析之前, 重要的是看到 $L_g L_f^k h(x) \in R$ 是一个函数, 而不是 x 空间的向量, 因此它本身没有进行坐标变换 $z = \phi(x)$ 的问题。要做坐标变换的是它的自变量 x 。因为在坐标变换 $z = \phi(x)$ 后, 以 z 做自变量并未改变中间变量(原自变量) x 的值, 所以 $L_{\bar{g}}L_{\bar{f}}^k\bar{h}(z)$ 与 $L_g L_f^k h(x)$ 的取值相同。容易看到, 当坐标变换前 $L_g L_f^k h(x) = 0$ 时, 得到的 $L_{\bar{g}}L_{\bar{f}}^k\bar{h}(z) = 0$; 当 $L_g L_f^k h(x) \neq 0$ 时, 得到的 $L_{\bar{g}}L_{\bar{f}}^k\bar{h}(z) \neq 0$ 。最后得结论: 相对阶在坐标变换 $z = \phi(x)$ 下是不变的。

11.3 系统通过坐标变换达到部分线性化

11.3.1 非线性系统在坐标变换后的正则形式表示

用式(11-16)定义的坐标变换式,对系统方程式(11-1)做变换,其变换过程为

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x^T} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)] \\ &= L_f h(x(t)) + L_g h(x(t))u(t)\end{aligned}$$

如果相对阶 $r > 1$, 则 $L_g h(x(t)) = 0$, 代入后, 得

$$\frac{dz}{dt} = L_f h(x(t)) = \phi_2(x(t)) = z_2$$

...

$$\frac{dz_{r-1}}{dt} = \frac{\partial \phi_{r-1}}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-2} h}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = L_f^{r-1} h(x(t)) = \phi_r(x(t)) = z_r$$

$$\begin{aligned}\frac{dz_r}{dt} &= \frac{\partial \phi_r}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x^T} [f(x) + g(x(t))u(t)] \\ &= L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t))u(t)\end{aligned}$$

令

$$a(x) = L_g L_f^{r-1} h(x) \quad b(x) = L_f^r h(x) \quad (11-17)$$

$$a(z) = L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(z)) \quad b(z) = L_f^r h(\phi^{-1}(z)) \quad (11-18)$$

注意到

$$\begin{aligned}a(x(t)) &= a(\phi^{-1}(z(t))) = a(z(t)) \\ b(x(t)) &= b(\phi^{-1}(z(t))) = b(z(t))\end{aligned}$$

得

$$\frac{dz_r}{dt} = b(z(t)) + a(z(t))u(t)$$

按相对阶定义, $a(z^0) \neq 0$, 再由函数光滑性知, 必存在 z^0 的一个邻域 U , 在 U 上 $a(z) \neq 0$ 。

补选 $\phi_{r-1}(x), \dots, \phi_n(x)$, 要实现正则形式, 使满足 $L_g \phi_i(x) = 0, i = r-1, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned}\frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x^T} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) = L_f \phi_i(x(t)) + L_g \phi_i(x(t))u(t) \\ &= L_f \phi_i(x(t)) \quad r+1 \leq i \leq n\end{aligned} \quad (11-19)$$

令

$$q_i(z) = L_f \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad r+1 \leq i \leq n \quad (11-20)$$

得

$$\frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t)) \quad r+1 \leq i \leq n \quad (11-21)$$

归纳后得到正则形式状态方程

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r \\
\dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\
\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= q_n(z) \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{11-22}$$

$$y = z_1 \tag{11-23}$$

正则形式的特点是,前 $r-1$ 个式子是线性的,输出 $y = z_1$ 是线性的,只有 \dot{z}_r 式出现 u , $\dot{z}_{r+1}, \dots, \dot{z}_n$ 式不出现 u 。

例 11.4 (通过非线性坐标变换将其化为正则形式)非线性系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= h(x) = x_3
\end{aligned}$$

首先,求相对阶。 $k=0$ 时,有

$$L_g h(x) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$k=1$ 时,有

$$L_f h(x) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

结果,相对阶 $r=2$ 。

其次,求变换映射。取

$$\begin{aligned}
z_1 &= \phi_1(x) = h(x) = x_3 \\
z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2
\end{aligned}$$

还需另外选择一附加函数 $\phi_3(x)$,使

(1) Jacobi 阵 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 非奇异;

(2) 满足 $L_g \phi_3(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} e^{x_2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = 0$;

(3) 对应原平衡点 $x=0$,使变换后新平衡点 $\phi(0) = z(0) = 0$,这里, $\phi_3(0) = z_3(0) = 0$ 。

用试凑方法,由(2),(3)解得 $\phi_3(x) = 1 + x_1 - e^{x_2}$ 。所得到的变换映射结果为

$$\begin{aligned} z_1 &= x_3 \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= 1 + x_1 - e^{x_2} \end{aligned} \quad (11-24)$$

易验证其 Jacobi 阵为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -e^{x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

对所有 x 非奇异,满足(1)的要求。与式(11-24)对应的逆变换映射为

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + z_3 + e^{z_2} \\ x_2 &= z_2 \\ x_3 &= z_1 \end{aligned} \quad (11-25)$$

再次,求得正则形式。作为预备,先算得

$$\begin{aligned} a(z) &= L_g L_f h(\phi^{-1}(z)) = L_g x_2 \big|_{x=\phi^{-1}(z)} = 1 \\ b(z) &= L_f^2 h(\phi^{-1}(z)) = x_1 x_2 \big|_{x=\phi^{-1}(z)} = (-1 + z_3 + e^{z_2}) z_2 \\ q_3(z) &= L_f \phi_3(\phi^{-1}(z)) - x_1(1 + x_2 e^{x_2}) \big|_{x=\phi^{-1}(z)} = (1 - z_3 - e^{z_2})(1 + z_2 e^{z_2}) \end{aligned}$$

代入式(11-22)、式(11-23)得变换后的系统方程正则形式结果,为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= (-1 + z_3 + e^{z_2}) z_2 + u \\ \dot{z}_3 &= (1 - z_3 - e^{z_2})(1 + z_2 e^{z_2}) \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

此方程对全局有效,因变换式(11-24)和式(11-25)是全局有效的坐标变换映射。

11.3.2 非线性系统在坐标变换后的准正则形式表示

在做正则形式变换时,在按 $L_g \phi_i(x) = 0$ 条件要求构造函数 $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ 的过程中,一般要解 $n-r$ 个偏微分方程。这往往很不容易,一些情况下甚至得不到合理的解。克服此困难的一个选择是放弃 $L_g \phi_i(x) = 0$ 条件,得到所谓准正则形式的解。由式(11-19),令

$$q_i(z) = L_f \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad (11-26)$$

$$p_i(z) = L_g \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad (11-27)$$

$$\text{得} \quad \frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t)) + p_i(z(t))u \quad r+1 \leq i \leq n \quad (11-28)$$

归纳后得到准正则形式方程

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r
\end{aligned} \tag{11-29}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\
\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{11-30}$$

准正则形式方程与正则形式方程的主要差别是,在 $\dot{z}_{r+1}, \dots, \dot{z}_n$ 式中一般有 u 出现。

例 11.5 (通过非线性坐标变换化为准正则形式)非线性系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} = f(x) + g(x)u &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = h(x) &= x_4
\end{aligned}$$

首先,求相对阶。

$$k=0, L_g h(x)=0;$$

$$k=1, L_f h(x) = x_1^2 + x_2, L_g L_f h(x) = 2(1 + x_3)。$$

可见当 $x_3 \neq -1$ 时,相对阶 $r=2$; $x_3 = -1$ 时,虽然 $L_g L_f h(x)=0$,但找不到 4 维邻域,不符合相对阶定义(1),不必算下去。

其次,找变换映射。因相对阶 $r=2$,取

$$\begin{aligned}
z_1 &= \phi_1(x) = h(x) = x_4 \\
z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2
\end{aligned}$$

如果要获得正则形式,补选的附加函数 ϕ_3, ϕ_4 应满足

$$L_g \phi_3(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x^T} g(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} (2 + 2x_3) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0$$

$$L_g \phi_4(x) = \frac{\partial \phi_4}{\partial x^T} g(x) = \frac{\partial \phi_4}{\partial x_2} (2 + 2x_3) + \frac{\partial \phi_4}{\partial x_3} = 0$$

有一组解是

$$\phi_3(x) = x_2 - 2x_3 - x_3^2 \quad \phi_4(x) = x_1$$

得到坐标变换映射及其逆映射

$$\begin{aligned}
z_1 &= \phi_1(x) = h(x) = x_4 & x_1 &= z_4 \\
z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2 & x_2 &= z_2 - z_4^2 \\
z_3 &= \phi_3(x) = x_2 - 2x_3 - x_3^2 & x_3 &= -1 \pm \sqrt{1 + z_2 - z_3 - z_4^2} \\
z_4 &= \phi_4(x) = x_1 & x_4 &= z_1
\end{aligned}$$

其 Jacobi 阵为(在 $x_3 \neq -1$ 时满秩)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2-2x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此变换关系将超出实域,即使限制在实域,也有非一一映射问题,变换关系十分复杂,使用不便,因此不再对原系统方程进行变换。下面转而采用准正则变换。这时只须考虑 $\phi(0)=0$, 不必考虑 $L_g\phi_3=0, L_g\phi_4=0$ 要求,改选 $z_3=\phi_3(x)=x_3$ 和 $z_4=\phi_4(x)=x_4$ 。综合在一起,得到坐标变换映射及其逆映射为

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1(x) = h(x) = x_4 & x_1 &= z_4 \\ z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2 & x_2 &= z_2 - z_4^2 \\ z_3 &= \phi_3(x) = x_3 & x_3 &= z_3 \\ z_4 &= \phi_4(x) = x_1 & x_4 &= z_1 \end{aligned}$$

其 Jacobi 阵(全局满秩)为

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后,对原系统方程进行变换,以得到准正则形式。计算

$$a(z) = L_g L_f h(\phi^{-1}(z)) = \left(\frac{\partial L_f h}{\partial x^T} g \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = (2 + 2x_3) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = 2 + 2z_3$$

$$\begin{aligned} b(z) &= L_f^2 h(\phi^{-1}(z)) = \left(\frac{\partial L_f h}{\partial x^T} f \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = (2x_1^2 x_2 - 2x_1^4 + x_1) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= 2z_4^2(z_2 - z_4^2) - 2z_4^4 + z_4 = z_4 + 2z_2 z_4^2 - 4z_4^4 \end{aligned}$$

$$q_3(z) = L_f \phi_3(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x^T} f \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = -x_3 \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = -z_3$$

$$q_4(z) = L_f \phi_4(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \phi_4}{\partial x^T} f \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = (x_1^2 + x_2) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = -z_4$$

$$p_3(z) = L_g \phi_3(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x^T} g \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = 1$$

$$p_4(z) = L_g \phi_4(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \phi_4}{\partial x^T} g \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = 0$$

代入式(11-29)和式(11-30),得变换后方程

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= b(z) + a(z)u = z_4 + 2z_2 z_4^2 - 4z_4^4 + (2 + 2z_3)u \\ \dot{z}_3 &= q_3(z) + p_3(z)u = -z_3 + u \\ \dot{z}_4 &= q_4(z) + p_4(z)u = -2z_4^3 + z_2 z_4 \end{aligned}$$

这一变换结果全局适用,其中包括 $x_3 = -1$ 。但是变换结果表明,在 $x_3 = -1$, 即 $z_3 = -1$ 处 \dot{z}_2 式中的 u 消失。

11.3.3 线性系统在坐标变换后的正则形式和准正则形式表示

对一般的单入单出线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}\quad (11-31)$$

式(11-15)定义的坐标变换式相当

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= cx \\ \phi_2(x) &= cAx \\ &\vdots \\ \phi_r(x) &= cA^{r-1}x \\ \phi_{r+1}(x) &= c_{r+1}x \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= c_nx\end{aligned}\quad \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_r(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{r-1} \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} x \quad (11-32a)$$

或记为

$$z = \phi(x) = \phi_x x \quad (11-32b)$$

用式(11-32)定义的坐标变换式,对系统方程式(11-31)做变换,其变换过程为

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = c(Ax + bu) = cAx + cbu$$

如果相对阶 $r > 1$, 则 $cb = 0$, 代入后得

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= cAx = \phi_2(x(t)) = z_2 \\ &\dots \\ \frac{dz_{r-1}}{dt} &= \frac{\partial \phi_{r-1}}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = cA^{r-1}x + cA^{r-2}bu = \phi_r(x(t)) = z_r \\ \frac{dz_r}{dt} &= \frac{\partial \phi_r}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} = cA^r x + cA^{r-1}bu\end{aligned}$$

$$\text{令} \quad a(x) = cA^{r-1}b \quad b(x) = cA^r x \quad (11-33a)$$

$$a(z) = cA^{r-1} \quad b(z) = cA^r \phi_x^{-1} z \quad (11-33b)$$

$$\text{得} \quad \frac{dz_r}{dt} = b(z(t)) + a(z(t))u(t)$$

因为按相对阶定义, $a(z^0) = cA^{r-1} \neq 0$, 所以由函数光滑性知, 必存在 z^0 的一个邻域 U , 在 U 上 $a(z) \neq 0$ 。

补选 $\phi_{r+1}(x) = c_{r+1}x, \dots, \phi_n(x) = c_nx$ 。要实现正则形式, 它们须对 $i = r+1, \dots, n$, 满足 $\langle c_i, b \rangle = 0$ 和 Jacobi 阵 ϕ 非奇异的要求, 则

$$\frac{dz_i}{dt} = c_i(Ax + bu) = c_iAx + c_i bu = c_iAx \quad r+1 \leq i \leq n \quad (11-34)$$

$$\text{令} \quad q_i(z) = c_i A \phi_x^{-1} z \quad r+1 \leq i \leq n \quad (11-35)$$

$$\text{得} \quad \frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t)) = c_i A \phi_x^{-1} z \quad r+1 \leq i \leq n \quad (11-36)$$

归纳后得到正则形式状态方程为

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r \\
\dot{z}_r &= cA^r\phi^{-1}z + cA^{r-1}u
\end{aligned}
\tag{11-37a}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{r+1} &= c_{r+1}A\phi_x^{-1}z \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= c_nA\phi_x^{-1}z \\
y &= z_1
\end{aligned}
\tag{11-37b}$$

第 12 章 单入单出系统的状态 反馈精确线性化

本章讨论单入单出非线性系统精确线性化中有关状态反馈的内容。12.1 节从一般意义上就相对阶 $r = n$ 系统讨论状态反馈线性化的一些基本问题, 主要包括非线性系统状态反馈控制的一般形式, 精确反馈线性化的基本方法和步骤, 先坐标变换后状态反馈和先状态反馈后坐标变换的等价性, 相对阶在状态反馈后保持不变等问题, 最后讨论了求非线性系统精确线性化结果系统的平衡点及其原像的问题。12.2 节和 12.3 节集中讨论状态空间精确线性化问题的充要条件和必要条件。12.4 节讨论给定输出函数且相对阶 $r = n$ 时的状态反馈精确线性化和输出函数按相对阶 $r = n$ 要求选择时的状态反馈线性化。12.5 节讨论系统线性近似式和精确线性化问题可解性的关系, 给出了非线性系统精确线性化问题可解的一个必要条件。12.6 节讨论相对阶 $r < n$ 系统的输入-状态线性化、系统的输入-输出线性化和相对阶 $r < n$ 系统输入-输出线性化后的平衡点。12.7 节讨论如何通过选择输出函数得到可能的最大相对阶。12.8 节讨论满足充要条件但未达到 $r = n$ 情况下如何通过二次处理使系统的相对阶仍能达到 $r = n$ 和实现精确线性化。

12.1 状态反馈线性化的一些基本问题

12.1.1 非线性系统状态反馈控制的一般形式

状态反馈线性化的一些基本问题主要是指: (1) 非线性系统状态反馈控制的一般形式; (2) 精确反馈线性化的基本方法和步骤; (3) 先坐标变换后状态反馈和先状态反馈后坐标变换是等价的; (4) 相对阶在状态反馈后保持不变等问题。

上一章已经通过坐标变换把系统部分线性化。一般情况下, 只靠坐标变换很难实现全部线性化, 多半还要依赖状态反馈。也就是说, 线性化一般是靠坐标变换和状态反馈两种手段来完成的。对于单入单出非线性系统, 状态反馈一般可表示为

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (12-1)$$

式中, v 是一个外参考输入。变量输入输出关系如图 12-1 所示。

加反馈后的系统有以下形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

这里假设函数 $\alpha(x), \beta(x)$ 定义在一个适当的开集上, 在此开集上满足 $\beta(x) \neq 0$ 。同时假设状态 x 可检测。

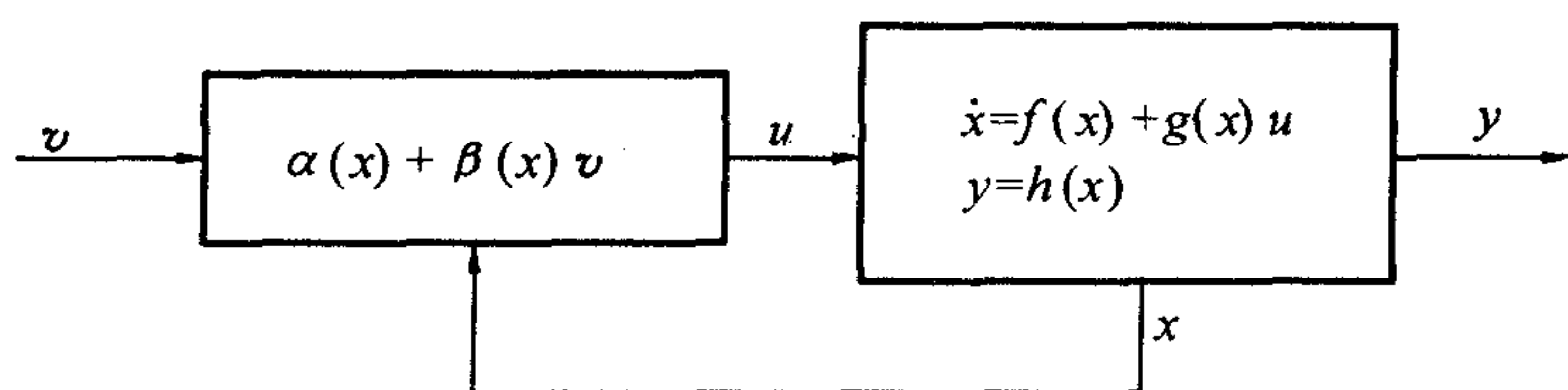


图 12-1 非线性系统状态反馈的一般形式

12.1.2 相对阶 $r = n$ 系统加反馈实现线性化

设系统的相对阶为 $r = n$, n 是某点 $x = x^0$ 邻域状态空间的维数。目标是如何使用坐标变换和状态反馈两种手段把系统化为既是线性的, 又是能控的系统。达到目标有两条途径: 先坐标变换后状态反馈和先状态反馈后坐标变换。我们将证明这两条途径是等价的, 所得到的结果相同。

12.1.2.1 先坐标变换后状态反馈

首先, 做坐标变换。因为 $r = n$, 取变换映射为

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1}h(x) \quad 1 \leq i \leq n \quad (12-2a)$$

或展开写为

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}h(x) \end{bmatrix} \quad (12-2b)$$

式中, $z = (z_1, \dots, z_n)$ 。按上一章给出的方法, 可得正则形式的系统方程

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (12-3a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (12-3b)$$

$$\text{式中} \quad a(z) = a(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} = L_g L_f^{r-1}h(\phi^{-1}(z)) \quad (12-4)$$

$$b(z) = b(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} = L_f^r h(\phi^{-1}(z)) \quad (12-5)$$

由相对阶定义, 在 $z^0 = \phi(x^0)$ 点上, $a(z^0) \neq 0$ 。由函数光滑性, 必存在 z^0 的一个邻域 U , 在 U 上, $a(z) \neq 0$ 。其次, 做状态反馈。因为只有 \dot{z}_n 式未线性化, 所以只需设计反馈, 使反馈通式(12-1)满足式(12-6), 就可全部线性化。

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v|_{x=\phi^{-1}(z)} = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v) \quad (12-6)$$

式中

$$\alpha(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} = -\frac{b(z)}{a(z)} \quad (12-7)$$

$$\alpha(x) = -\frac{b(x)}{a(x)} = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{n-1}h(x)}$$

$$\beta(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} = -\frac{1}{a(z)} \quad (12-8)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{a(x)} = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}$$

代入后得闭环系统方程

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (12-9)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned} \quad (12-10)$$

$$y = z_1$$

或写成 $\dot{z} = Az + Bv$ (12-11)

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

式(12-11)被称为 Brunovsky 标准形(Brunovsky canonical form)。易验证, A, B 满足线性系统的能控性秩条件

$$\text{rank}[B : AB : \cdots : A^{n-1}B] = n \quad (12-12)$$

可见, 所得系统是一个线性且能控的系统。以上结果可归纳为定理 12.1。

定理 12.1 任何在某点 x^0 有相对阶 n 的非线性系统, 可通过定义在 x^0 邻域的坐标变换式(12-2)和定义在 x^0 邻域的状态反馈式(12-6), 变换为在 $z^0 = \phi(x^0)$ 的邻域是线性的且能控的系统。

12.1.2.2 先状态反馈后坐标变换

首先, 做状态反馈。仍采用式(12-6)的状态反馈, 但改用 x 坐标

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (12-13)$$

代入系统方程式(11-1), 得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ &= f(x) + g(x)\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(-L_f^n h(x) + v) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (12-14)$$

其次, 做坐标变换 $z = \phi(x)$, 变 x 为 z 。

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \left[f(x) + g(x)\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(-L_f^n h(x) + v) \right] \\ &= L_f h(x) + L_g h(x)\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(-L_f^n h(x) + v) = L_f h(x) = z_2 \end{aligned}$$

...

$$\frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{n-2} h}{\partial x} \left[f(x) + g(x)\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(-L_f^n h(x) + v) \right]$$

$$= L_f^{n-1}h(x) + L_g L_f^{n-2}h(x) \frac{1}{L_g L_f^{n-1}h(x)} (-L_f^n h(x) + v) = L_f^{n-1}h(x) = z_n$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{n-1}h}{\partial x} \left[f(x) + g(x) \frac{1}{L_g L_f^{n-1}h(x)} (-L_f^n h(x) + v) \right]$$

$$= L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1}h(x) \frac{1}{L_g L_f^{n-1}h(x)} (-L_f^n h(x) + v) = v$$

$$y = z_1$$

可见,也得到与式(12-11)相同的结果。这证明了先坐标变换后状态反馈和先状态反馈后坐标变换是等价的,所得到的结果相同。

例 12.1 (给定输出函数满足 $r = n$ 的精确线性化)考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_3$$

首先求相对阶。 $k=0$ 时, $L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = 0$ 。

$$k=1 \text{ 时, 有 } L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = x_1 - x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g(x) = 0$$

$$k=2 \text{ 时, 有 } L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f(x) = -x_1 - x_2^2$$

$$L_g L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} g(x) = -(1 + 2x_2)\exp(x_2)$$

$$L_f^3 h(x) = -2x_2(x_1 + x_2^2)$$

可见在 $1 + 2x_2 \neq 0$ 的各点上, 相对阶 $r = n = 3$ 。因此, 在任何 $1 + 2x_2 \neq 0$ 点附近系统可通过坐标变换和状态反馈, 变换为线性的和能控的系统。

其次, 加状态反馈。

$$u = \frac{-L_f^n h(x) + v}{L_g L_f^{n-1} h(x)} = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} v$$

最后, 做坐标变换。取

$$z_1 = h(x) = x_3 \quad z_2 = L_f h(x) = x_1 - x_2 \quad z_3 = L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$$

反变换为

$$x_1 = z_2 - 0.5 \pm 0.5 \sqrt{1 - 4(z_2 + z_3)}$$

$$x_2 = -0.5 \pm 0.5 \sqrt{1 - 4(z_2 + z_3)}$$

反馈和坐标变换都只局部定义在 $x=0$ 附近, 在 $1 + 2x_2 = 0$ 的面上无定义。对向量场做变换

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial z} (f(x) + g(x)u(x)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2)}{1 + 2x_2} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \\ -2x_2(x_1 + x_2^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_2(x_1 + x_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(g(x)\beta(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{-(1+2x_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

最后得精确线性化后的系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = z_1$$

是线性的和能控的。

12.1.2.3 系统精确反馈线性化的总变换式

在系统相对阶 $r = n$ 情况下,从式(11-1)的原始系统方程 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 到最终结果 Brunovsky 标准形 $\dot{z} = Az + Bv$,经历了坐标变换和状态反馈两步操作。总的结果可以概括成总变换关系

$$Az = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (12-15a)$$

$$B = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}g(x)\beta(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (12-15b)$$

最后达到了线性和能控两方面的要求。

12.1.2.4 相对阶 $r = n$ 系统精确反馈线性化前后的平衡点对原系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

平衡点(equilibrium point)被定义为满足式 $f(x) = 0$ 的 x 点,记为 x^* 。

对精确反馈线性化后的系统

$$\dot{z} = Az + Bv$$

平衡点被定义为满足式 $Az = 0$ 的点 z ,记为 z^* 。注意到总变换式(12-15a),也就是满足

$$Az = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = 0 \quad (12-16)$$

的点 z 。下面就此式的左端和右端分别研究平衡点条件和映射关系。

首先,从式(12-16)左端 $Az = 0$ 出发研究平衡点条件和映射关系。由式(12-11)知矩阵 A 不满秩,满足 $Az = [z_2 \ \cdots \ z_n \ 0]^T = 0$ 的解对应一零空间,而限于 $z = 0$ 。此零空间就是 $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0, z_1$ 可取任意值。

因为,一般地说,平衡点 $Az^* = 0$ 与平衡点 $f(x^*) = 0$ 彼此间不一定有完全的像与原像的对应关系,所以有必要考察 $Az^* = 0$ 的原像点 x^* 在什么位置。因为 $Az = [z_2 \ z_3 \ \cdots \ z_n \ 0]^T = 0, Az^* = 0$ 的原像点 x^* 应满足条件

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1}h(x) = \frac{\partial L_f^{i-2}h}{\partial x}f(x) = 0 \quad 2 \leq i \leq n$$

可见原像点一般位于满足条件

$$L_f^{i-1}h(x) = \frac{\partial L_f^{i-2}h}{\partial x}f(x) = 0 \quad 2 \leq i \leq n$$

的点 x^* 上。又因为 $f(x) = 0$ 显然满足此式, 所以 $Az^e = 0$ 的原像点 x^* 至少包括满足式 $f(x) = 0$ 的平衡点 x^e 。

由此得结论: 在既有坐标变换, 又施加反馈情况下的 $Az^e = 0$ 的原像点 x^* 位于满足条件

$$f(x^*) = 0 \quad (12-17a)$$

的点上, 此外的原像点 x^* 满足一般式

$$L_f^{i-1}h(x^*) = \frac{\partial L_f^{i-2}h}{\partial x}f(x^*) = 0 \quad 2 \leq i \leq n \quad (12-17b)$$

在前面讨论 $Az^e = 0$ 的原像点的基础上, 如果改而讨论原点 $z^e = 0$ 的原像点, 则应在式 (12-17) 的条件上再加上

$$z_1 = h(x) = 0 \quad (12-18)$$

的条件。

其次, 从式 (12-16) 右端

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\varphi^{-1}(z)} = 0$$

出发, 研究平衡点条件和映射关系。实际上, 因为

$$\dot{z} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\varphi^{-1}(z)}$$

指的就是加状态反馈以后的坐标变换正则形式式 (11-22), 即

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned}$$

所以平衡点条件

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\varphi^{-1}(z)} = 0$$

同样是指 $[z_2 \ z_3 \ \dots \ z_n \ 0]^T$ 。所得原像点条件与式 (12-17) 是一样的。

再次, 讨论在只有坐标变换, 没有状态反馈情况下 $z^e = 0$ 的原像点 x^* 。

在只有坐标变换, 没有状态反馈情况下的系统平衡点定义为满足条件 $[z_2 \ z_3 \ \dots \ z_n \ b(z)]^T$ 的点。这是因为系统有正则形式

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

与有反馈所不同的仅仅是末一个方程不再是 $\dot{z}_n = v$, 需要增加 $b(z) = 0$ 的条件。因为

$$b(x) = L_f^n h(x) = \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial x} f(x) = 0$$

只需把原像点条件(12-17b)改为

$$L_f^{i-1} h(x^*) = \frac{\partial L_f^{i-2} h}{\partial x} f(x^*) = 0 \quad 2 \leq i \leq n+1$$

结论是:在只有坐标变换,不施加反馈情况下的 $z^e = 0$ 的原像点 x^* 位于满足条件

$$f(x^*) = 0 \quad (12-19a)$$

的点上,此外的原像点 x^* 满足一般式

$$L_f^{i-1} h(x^*) = \frac{\partial L_f^{i-2} h}{\partial x} f(x^*) = 0 \quad 2 \leq i \leq n+1 \quad (12-19b)$$

最后要提请读者关注的是,关于情况(12-17b)的例子,见本书第19章19.2节的机械手实例。另外,当原系统平衡点位置不理想时,可通过加常值反馈加以移动,其例子也见本书第19章19.2节的机械手实例。平衡点移动后,变换坐标和主要线性化结果保持不变,也不影响相对阶。

12.1.3 系统精确反馈线性化后再外加线性状态反馈

非线性系统经坐标变换和加状态反馈后,已经成为 Brunovsky 标准形的线性系统。这个线性系统与普通线性系统并无区别,可以和普通线性系统一样加上状态反馈或输出反馈。比如,这里给它加上一个如下形式的线性状态反馈(如图12-2)

$$v = \gamma(z) + \bar{v} = -c_0 z_1 - \cdots - c_{n-1} z_n + \bar{v} \quad (12-20)$$

式中

$$\gamma(z) = -c_0 z_1 - c_1 z_2 - \cdots - c_{n-1} z_n \quad (12-21)$$

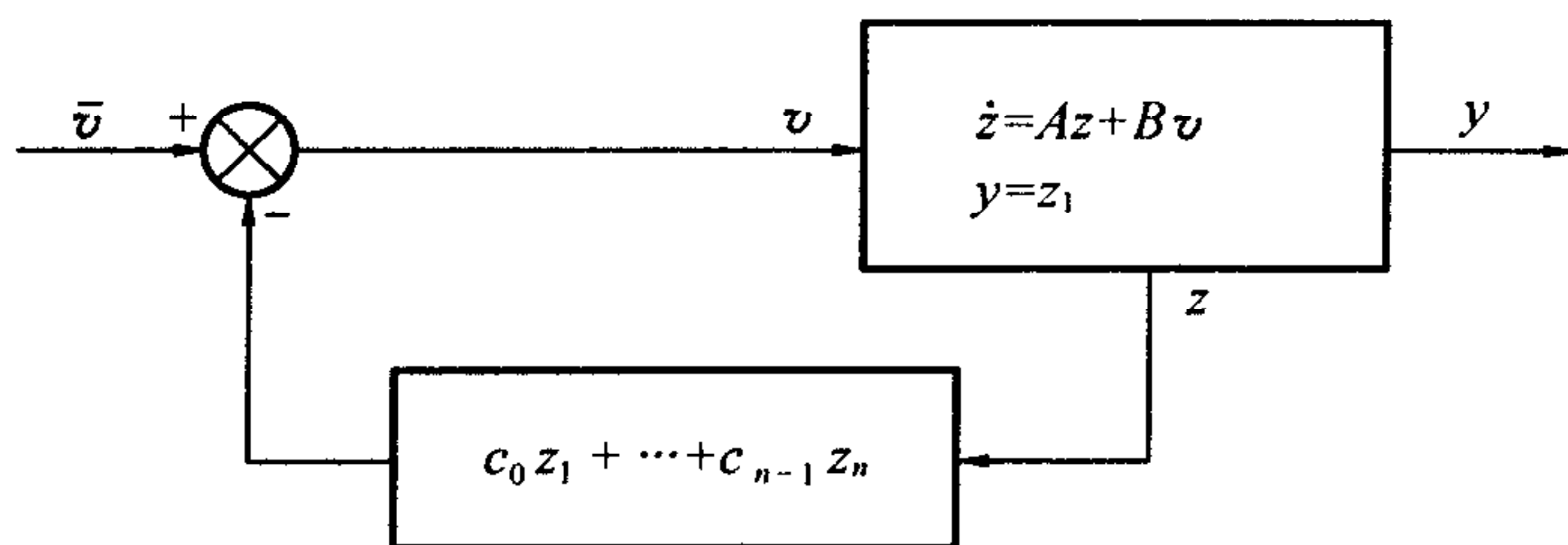


图12-2 非线性系统精确反馈线性化后再加线性状态反馈

加上此反馈大外环后,系统方程形式为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{v} \quad (12-22a)$$

$$y = z_1$$

或简记为

$$\dot{z} = A_c z + \bar{b} \bar{v}$$

$$y = z_1$$

式(12-20)中的 z 代换为 x 后的形式是

$$v = \gamma(x) + \bar{v} = -c_0 h(x) - c_1 L_f h(x) - \cdots - c_{n-1} L_f^{n-1} h(x) + \bar{v} \quad (12-23)$$

式中

$$\gamma(x) = c_0 h(x) + c_1 L_f h(x) + \cdots + c_{n-1} L_f^{n-1} h(x)$$

对原坐标 x 来说,两外环可以用一个等效的环来代替,总的控制可以综合为

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\gamma(x) + \beta(x)\bar{v} = \frac{-L_f^n h(x) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i L_f^i h(x) + \bar{v}}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (12-24)$$

闭环系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)\gamma(x) + g(x)\beta(x)\bar{v} \\ &= f(x) + g(x) \frac{-L_f^n h(x) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i L_f^i h(x) + \bar{v}}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \end{aligned} \quad (12-25a)$$

$$y = h(x) \quad (12-25b)$$

并得到图 12-3。

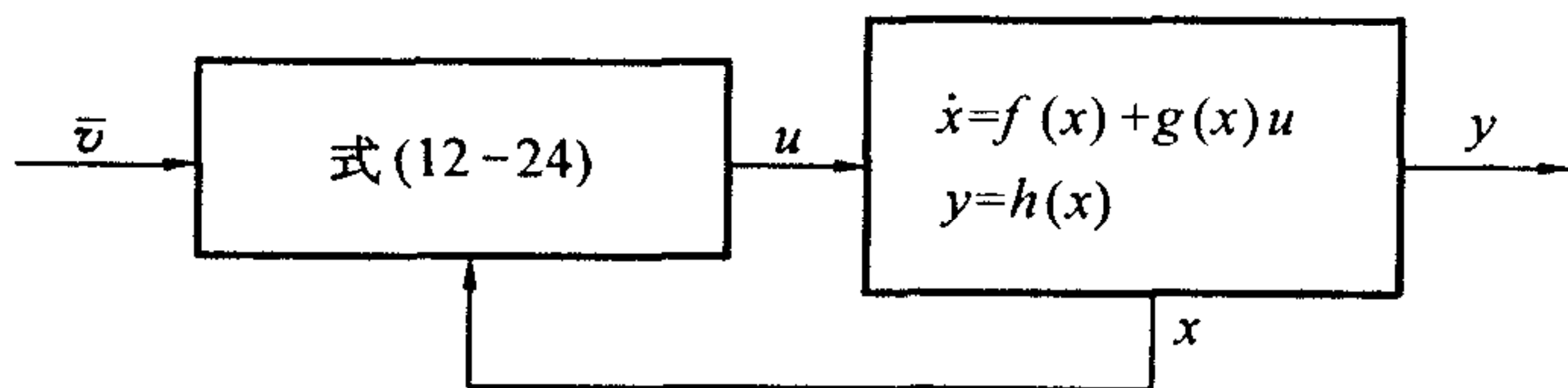


图 12-3 两反馈环综合为一环

12.1.4 系统相对阶在状态反馈下保持不变

12.1.4.1 对相对阶为 r 的控制系统成立的一个公式

公式 1

$$L_{f+ga}^k h(x) = L_f^k h(x) \quad 0 \leq k \leq r-1 \quad (12-26)$$

证明 (数学归纳法)对 $k=0$,得 $h(x)=h(x)$,式(12-26)成立。对 $k=1$,有

$$L_{f+ga} h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) \alpha(x) = L_f h(x) + L_g h(x) \alpha(x)$$

如果相对阶 $r \geq 1$,得 $L_{f+ga} h(x) = L_f h(x)$,式(12-26)成立。设 $k=i$ 时,式(12-26)成立,即 $L_{f+ga}^i h(x) = L_f^i h(x)$,证明 $k=i+1 \leq r-1$ 时,式(12-26)成立,即 $L_{f+ga}^{i+1} h(x) = L_f^{i+1} h(x)$,有

$$\begin{aligned} L_{f+ga}^{i+1} h(x) &= L_{f+ga} L_{f+ga}^i h(x) = L_{f+ga} L_f^i h(x) = \frac{\partial L_f^i h}{\partial x} (f(x) + g(x) \alpha(x)) \\ &= L_f^{i+1} h(x) + L_g L_f^i h(x) \alpha(x) = L_f^{i+1} h(x) \end{aligned}$$

公式得证。

12.1.4.2 相对阶在状态反馈下保持不变

前一章已经证明了系统相对阶在坐标变换下保持不变。本节将证明系统相对阶在状态反馈后也保持不变,其中包括线性化反馈和线性化后的外反馈。式(12-25)是加了两外环反馈后的系统方程。该方程可表示为

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{g}(x)\hat{v} \quad (12-27a)$$

$$y = \hat{h}(x) \quad (12-27b)$$

式中

$$\hat{f}(x) = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)\gamma(x) \quad (12-28)$$

$$\hat{g}(x) = g(x)\beta(x) \quad (12-29)$$

$$\hat{h}(x) = h(x) \quad (12-30)$$

下面求反馈后的相对阶。对 $0 \leq k < r-1 = n-1$, 注意到式(12-26)和相对阶定义在 x^0 邻域, 得

$$L_{\hat{g}} L_{\hat{f}}^k \hat{h}(x) = L_{g\beta} L_{f+g(\alpha+\beta\gamma)}^k h(x) = L_g L_f^k h(x) \beta(x) = 0$$

对 $k = r-1 = n-1$, 注意到式(12-8)中 $\beta(x)$ 的定义, 得

$$L_{\hat{g}} L_{\hat{f}}^{r-1} \hat{h}(x^0) = L_{g\beta} L_{f+g(\alpha+\beta\gamma)}^{r-1} h(x^0) = L_g L_f^{r-1} h(x^0) \beta(x^0) = 1 \neq 0$$

这表明相对阶 r 在状态反馈(包括线性化反馈和线性化后的外反馈)下是不变的。

12.2 状态反馈精确线性化的充要条件

12.2.1 状态空间精确线性化问题的定义

在 12.1 节已经讨论了非线性系统在输出函数给定情况下, 通过坐标变换和状态反馈实现精确线性化的具体方法, 并给出了实例。但对状态空间精确线性化问题并未给出正式的定义。下面给出这一定义。

非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (12-31)$$

的状态空间精确线性化问题(state space exact linearization problem)被定义为: 给定一点 x^0 , 如果可能, 寻找 x^0 的一个邻域 U 和一个定义在 U 上的反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

和定义在 U 上的坐标变换 $z = \phi(x)$, 使相应的闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v$$

是线性的和能控的。

12.2.2 状态空间精确线性化问题的基本充要条件

定理 12.2 状态空间精确线性化问题可解的充要条件是, 存在 x^0 的一个邻域 U 和定义在 U 上的一个实值函数 $\lambda(x)$, 使系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= \lambda(x) \end{aligned} \quad (12-32)$$

在 x^0 的相对阶数等于 n 。

证明 (充分性) 已知使相对阶 $r = n$ 的输出函数 $\lambda(x) = h(x)$, 这时必可得到线性化且能控的系统, 求解过程如前面 12.1 节所述。(必要性) 假设系统已精确线性化, 已得到

Brunovsky 标准形解。要证明的是,必有相应的输出函数 $\lambda(x)$,使 $r = n$ 。实际上, $y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]z$ 即为所求,因为它使变换后的系统有 $r = n$,同时,前已证明相对阶在坐标变换和反馈下保持不变,所以与 $[1 \ 0 \ \cdots \ 0]z$ 对应的变换前的 $\lambda(x)$ 也有同样的相对阶 $r = n$ 。于是得证。

按相对阶定义,把定理 12.2 中 $\lambda(x)$ 在 x^0 的相对阶等于 n 的条件用公式具体表达出来,就得到下面的引理。

引理 12.3 系统式(12-32)的状态空间精确线性化问题可解的充要条件是,存在 x^0 的一个邻域 U 和定义在 U 上的一个实值函数 $\lambda(x)$,满足

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = \cdots = L_g L_f^{n-2} \lambda(x) = 0 \quad \text{对所有 } x \in U \quad (12-33a)$$

$$L_g L_f^{n-1} \lambda(x^0) \neq 0 \quad (12-33b)$$

引理中,式(12-33a)是 $n-1$ 个偏微分方程,式(12-33b)可视为解的非平凡条件,借以排除 $\lambda(x) = 0$ 一类平凡解。

12.2.3 状态空间精确线性化问题可解基本充要条件的等价形式

由式(11-3)的等价关系,定理 12.3 可以表达为引理 12.4。

引理 12.4 系统式(12-32)的状态空间精确线性化问题可解的充要条件是,存在 x^0 的一个邻域 U 和定义在 U 上的一个实值函数 $\lambda(x)$,满足

$$L_g \lambda(x) = L_{\text{ad}_f g} \lambda(x) = \cdots = L_{\text{ad}_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \quad \text{对所有 } x \in U \quad (12-34a)$$

$$L_{\text{ad}_f^{n-1} g} \lambda(x) \neq 0 \quad (12-34b)$$

引理中,式(12-34a)是 $n-1$ 个偏微分方程,式(12-34b)可视为解的非平凡条件,借以排除 $\lambda(x) = 0$ 一类平凡解。

12.2.4 充要条件等价形式中 $\lambda(x)$ 有解的充要条件

引理 12.5 一个定义在 x^0 邻域 U 上,并满足偏微分方程式(12-34a)和非平凡条件式(12-34b)的实值函数 $\lambda(x)$,其存在的充要条件是:

$$(1) \text{ 矩阵 } [g(x^0) \ \text{ad}_f g(x^0) \ \cdots \ \text{ad}_f^{n-2} g(x^0) \ \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)] \text{ 的秩为 } n; \quad (12-35a)$$

$$(2) \text{ 分布 } D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \cdots, \text{ad}_f^{n-2} g\} \text{ 在 } x^0 \text{ 的一个邻域是对合的。} \quad (12-35b)$$

证明 (必要性)设满足式(12-34a)和式(12-34b)的函数 $\lambda(x)$ 存在,则函数 $\lambda(x)$ 满足式(12-33a)和式(12-33b)。根据这些条件可得到引理 11.2 证明中的式(11-9)。引理 11.2 已证明过该矩阵是一个满秩阵,因此得到结果(1)的必要性。如果(1)成立,则分布 D 在 x^0 附近是非奇异的,是 $n-1$ 维的。把式(12-34a)改写为

$$\langle d\lambda(x) [g(x) \ \text{ad}_f g(x) \ \cdots \ \text{ad}_f^{n-2} g(x)] \rangle = 0$$

这说明, $d\lambda(x)$ 在 x^0 附近是一维对偶分布 D^\perp 的一个基底,由假设, $\lambda(x)$ 存在,故分布 D 是可积的。由 Frobenius 定理,分布 D 在 x^0 附近对合。因此,得到结果(2)的必要性。

(充分性)假设(1)成立,则分布 D 在 x^0 附近是非奇异的,是 $n-1$ 维的。因(2)也成立,分布 D 是对合的。由 Frobenius 定理知,存在一个定义在 x^0 邻域 U 的实值函数 $\lambda(x)$,且 $d\lambda(x)$ 张成 D^\perp ,也就是 $\lambda(x)$ 是偏微分方程式(12-34a)的解,而且 $\lambda(x)$ 满足式(12-34b)。 $\lambda(x)$ 满足式(12-34b),保证 $\lambda(x)$ 是非零解。证毕。

引理 12.5 的重要性和实用性在于,充要条件中不出现待求的 $\lambda(x)$ 本身,在 $\lambda(x)$ 未知

情况下,能判断其是否存在。因此,在解偏微分方程式(12-34a)之前,可用于判断 $\lambda(x)$ 是否存在。综合以上结果,可得到下面的定理。

定理 12.6 系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 的状态空间精确线性化问题在 x^0 近处可解(即存在一个输出函数 $\lambda(x)$ 使系统在 x^0 有相对阶 n)的充要条件是:

$$(1) \text{ 矩阵 } [g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-2} g(x^0) \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)] \text{ 的秩为 } n; \quad (12-36a)$$

$$(2) \text{ 分布 } D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \cdots, \text{ad}_f^{n-2} g\} \text{ 在 } x^0 \text{ 的一个邻域是对合的。} \quad (12-36b)$$

12.3 状态反馈精确线性化的必要条件

12.3.1 低维分布对合引理

引理 12.7 如果定理 12.6 两条件成立,则分布

$$D_k = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \cdots, \text{ad}_f^k g\} \quad \forall 0 \leq k \leq n-3 \quad (12-37)$$

在 x^0 附近对合。

证明 已知 D_{n-2} 对合,欲证 $D_{n-3}, \cdots, D_1, D_0$ 对合。因为已知 $D_{n-3}, \cdots, D_1, D_0$ 都非奇异,要证明对合只需证明 $D_{n-3}, \cdots, D_1, D_0$ 都可积,即证明后面的式(12-39)成立。

因定理 12.6 两条件成立,说明式(12-33a)和式(13-33b)成立,即

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = \cdots = L_g L_f^{n-2} \lambda(x) = 0 \quad \text{对所有 } x \in U$$

$$L_g L_f^{n-1} \lambda(x^0) \neq 0$$

把式(12-33a)分别代入引理 11.1 中恒等式(11-2)的右方。为方便,在代入之前要把式(11-2)的变量做 $\phi \rightarrow \lambda$ 代换,并取 $m=0$,得式(11-2)的简化形式

$$\begin{aligned} \langle dL_f^s \lambda(x), \text{ad}_f^k g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} \langle dL_f^{s+i} \lambda(x), g(x) \rangle \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} L_f^{k-i} L_g L_f^{s+i} \lambda(x) \end{aligned} \quad (12-38)$$

因为系统有相对阶 $r=n$,所以当 $s+i < n-1$ 时 $L_g L_f^{s+i} \lambda(x) = 0$ 。

当取 $s=0, 0 \leq k \leq n-2$ 时,式(12-38)右端为零,相应得到

$$d\lambda(x) [g(x) \quad \text{ad}_f g(x) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^k g(x)] = 0 \quad 0 \leq k \leq n-2$$

当取 $s=1, 0 \leq k \leq n-3$ 时,式(12-38)右端为零,相应得到

$$dL_f \lambda(x) [g(x) \quad \text{ad}_f g(x) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^k g(x)] = 0 \quad 0 \leq k \leq n-3$$

...

当取 $s=n-2-k, 0 \leq k \leq 1$ 时,右端为零,相应得到

$$dL_f^{n-3} \lambda(x) [g(x) \quad \text{ad}_f g(x)] = 0 \quad 0 \leq k \leq 1$$

当取 $s=n-2-k, k=0$ 时,右端为零,相应得到

$$dL_f^{n-2} \lambda(x) [g(x)] = 0 \quad k=0$$

可见

$$\begin{aligned} \text{span}\{d\lambda\} &\subset D_{n-2}^\perp \\ \text{span}\{d\lambda, dL_f \lambda(x)\} &\subset D_{n-3}^\perp \end{aligned}$$

...

$$\text{span}\{d\lambda, dL_f\lambda(x), \dots, dL_f^{n-k-2}\lambda(x)\} \subset D_k^\perp \quad 0 \leq k \leq n-2$$

由引理 11.2, 因为相对阶 $r = n$, 所以以下各全微分对偶向量是线性独立的

$$dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{n-1} h(x^0)$$

因为已知 D_k 是 $k+1$ 维, 所以, D_k^\perp 在 x^0 附近是 $n-k-1$ 维。于是, 知

$$\text{span}\{d\lambda, dL_f\lambda(x), \dots, dL_f^{n-k-2}\lambda(x)\} = D_k^\perp \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad (12-39)$$

由可积性定义, $D_k, k \leq n-2$ 在 x^0 附近可积。因为 $D_k, k \leq n-2$ 非奇异和可积, 由 Frobenius 定理, $D_k, k \leq n-2$ 在 x^0 附近对合(注: 因为 D_{n-2} 对合是已知的, 在结论中可不写出, 所以有 $D_k, k \leq n-3$ 。得证。

定理 12.8 状态空间精确线性化问题可解的一个必要条件是, 所有分布

$$D_k = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^k g\} \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad (12-40)$$

在 x^0 附近对合。

证明 状态空间精确线性化问题可解必满足定理 12.6 两条件, 因此得证。

12.4 按 $r = n$ 要求选择输出函数的状态反馈精确线性化

12.4.1 给定输出函数且相对阶 $r = n$ 时的状态反馈精确线性化

相对阶 $r = n$ 系统的精确反馈线性化问题, 主要有两种类型。第一种是满足 $r = n$ 要求的输出函数已给定的情况下的状态反馈线性化, 第二种是输出函数不给定, 有待按相对阶 $r = n$ 的要求来选择情况下的状态反馈线性化。第一种情况, 即输出函数给定情况下的状态反馈线性化, 已经在 12.1.2 节论证过, 这里不再重复, 请读者查阅该节。下面讨论第二种情况。

12.4.2 输出函数按相对阶 $r = n$ 要求选择时的状态反馈线性化

把待寻找的输出函数特别地记为 $\lambda(x)$ 。对系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= \lambda(x) \end{aligned} \quad (12-41)$$

来说, 按相对阶 $r = n$ 要求选择输出函数 $\lambda(x)$ 的状态空间精确线性化问题, 同样可表述为: 给定一点 x^0 , 如果可能, 寻找 x^0 的一个邻域 U 和一个定义在 U 上的反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

和定义在 U 上的坐标变换 $z = \phi(x)$, 使相应的闭环系统

$$\dot{z} = f(z) + g(z)\alpha(z) + g(z)\beta(z)v$$

在变换 $z = \phi(x)$ 下是线性和能控的。所不同的只是 $\lambda(x)$ 是未知的, 或说这是输出函数未给定情况下的状态空间精确线性化问题。下面让我们用实例来说明, 实现状态空间精确线性化的具体步骤和方法。

例 12.2 (输出函数按相对阶 $r = n$ 要求选择时的状态反馈线性化) 给定系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} u$$

第一步,检查是否满足定理 12.6 的两个条件。设取 $x^0=0$,计算

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & x_3 & 1+x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1+x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+x_1)(1+2x_2) \end{bmatrix} \\ \text{ad}_f^2 g(x) &= \begin{bmatrix} (1+x_2)(1+2x_2)(1+x_1) - x_3 x_1 \\ x_3(1+x_2) \\ -x_3(1+x_2)(1+2x_2) - 3x_1(1+x_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在 $x^0=0$, 矩阵

$$[g(x) \quad \text{ad}_f g(x) \quad \text{ad}_f^2 g(x)]_{x^0=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩为 3, 满足定理 12.6 的条件(1)。再研究分布

$$D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$$

的对合性。因为李积

$$[g, \text{ad}_f g] = \frac{\partial \text{ad}_f g}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} \text{ad}_f g = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 \\ -(1+x_1)(3+4x_2) \end{bmatrix}$$

而根据

$$\begin{aligned} & [g(x) \quad \text{ad}_f g(x) \quad [g, \text{ad}_f g(x)]] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+x_2 & x_1 & -x_1 \\ -x_3 & -(1+x_1)(1+2x_2) & -(1+x_1)(3+4x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

的秩为 2, 可断定 $[g, \text{ad}_f g] \in D$, 可见满足定理 12.6 的条件(2)。定理 12.6 成立, 结论: 使相对阶 $r=n$ 的输出函数 $\lambda(x)$ 存在。

第二步, 寻找 $\lambda(x)$ 。根据式(12-32)和式(12-33a), $\lambda(x)$ 应满足

$$L_g \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} g(x) = 0$$

$$L_{\text{ad}_f g} \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \text{ad}_f g(x) = 0$$

综合在一起, 得

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} [g(x) \quad \text{ad}_f g(x)] = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+x_2 & x_1 \\ -x_3 & -(1+x_1)(1+2x_2) \end{bmatrix} = 0$$

此偏微分方程有解 $\lambda(x) = x_1$ 。

第三步,验证相对阶。当取 $y = \lambda(x) = x_1$ 时,应在 $x^0 = 0$ 生成一个相对阶 $r = n = 3$ 的线性系统。现在验证系统的相对阶。

$k=0$ 时,有

$$L_g \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} g(x) = 0$$

$k=1$ 时,有

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} = x_3(1+x_2)$$

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial L_f \lambda}{\partial x} g(x) = (0 \quad x_3 \quad 1+x_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$k=2$ 时,有

$$L_f^2 \lambda(x) = \frac{\partial L_f \lambda}{\partial x} f(x) = (0 \quad x_3 \quad 1+x_2) \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} \\ = x_1 x_3 + (1+x_2)x_2(1+x_1)$$

$$L_g L_f^2 \lambda(x) = \frac{\partial L_f^2 \lambda}{\partial x} g(x) = (1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2) - x_1 x_3$$

结果 $L_g L_f^2 \lambda(x^0) = 1 \neq 0$, 相对阶 $r = n = 3$ 。验证毕。

第四步,求反馈和坐标变换。根据式(12-7)和式(12-8),得

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^3 \lambda(x)}{L_g L_f^2 \lambda(x)} \\ = \frac{-x_3^2(1+x_2) - x_2 x_3(1+x_2)^2 - x_1(1+x_1)(1+2x_2) - x_1 x_2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2) - x_1 x_3}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2 \lambda(x)} = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2) - x_1 x_3}$$

反馈输入

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

坐标变换映射

$$z_1 = \lambda(x) = x_1$$

$$z_2 = L_f \lambda(x) = x_3(1+x_2)$$

$$z_3 = L_f^2 \lambda(x) = x_3 x_1 + (1+x_1)(1+x_2)x_2$$

第五步,变换后的系统。状态方程右端第一项

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 1+x_2 \\ x_3 + (1+x_2)x_2 & (1+x_1)(1+2x_2) & x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(\begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \alpha(x) \right) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_3x_1 + x_2(1+x_1)(1+x_2) \\ 0 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

右端第 2 项

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \beta(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} v \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 1+x_2 \\ x_3 + (1+x_2)x_2 & (1+x_1)(1+2x_2) & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \beta(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} v \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \end{aligned}$$

最后的变换后的系统方程为

$$\dot{z} = Az + Bv = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

12.5 系统线性近似式和精确线性化问题可解性的关系

12.5.1 非线性系统的线性近似式

非线性系统的线性近似式保留了非线性系统的一些固有性质,所以非线性系统的线性近似式和精确线性化问题可解性之间有一定的必然联系,本节将揭示这种关系。

为得到线性近似式,对 $f(x)$ 来说,可以把非线性系统在平衡点 $x^e=0$ 展开成 Taylor 级数,保留零次项和一次项,把二次及二次以上项表示为高阶项。注意到 $f(x^e)=f(0)=0$ 得

$$f(x) = f(x^e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^e=0} x + f_2(x) = Ax + f_2(x) \quad (12-42a)$$

式中
$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (12-42b)$$

同时高阶项满足
$$f_2(0)=0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x=0}=0 \quad (12-42c)$$

对 $g(x)$ 来说,则只保留零阶项,其它项完全归入高阶项,得

$$g(x) = g(x^e) + g_1(x) = B + g_1(x) \quad (12-43a)$$

式中
$$B = g(x^e) = g(0) \quad g_1(0)=0 \quad (12-43b)$$

对 $h(x)$ 来说,要求满足 $h(0)=0$,其展开式为

$$h(x) = Cx + h_2(x) \quad (12-44a)$$

式中
$$C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (12-44b)$$

同时高阶项满足
$$h_2(0) = 0 \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12-44c)$$

定义 12.1 对非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

来说
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (12-45)$$

式中
$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad B = g(x^e) = g(0) \quad C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (12-46)$$

被称为系统在 $x = x^e = 0$ 的线性近似式(linear approximation)。

12.5.2 非线性系统精确线性化问题可解的一个必要条件

12.5.2.1 与线性近似式有关的一个恒等式

公式
$$\text{ad}_f^k g(x) = (-1)^k A^k B + P_k(x) \quad \text{在 } x=0 \text{ 邻域 } x \quad (12-47)$$

式中, $P_k(x)$ 是满足 $P_k(0) = 0$ 的一个函数。

证明 (数学归纳法)对 $k=0$, 在 $x=0$ 邻域, 式(12-47)化为 $g(x) = B + P_0(x)$, 与已知条件式(12-46)一致, 该式成立。对 $k=1$, 在 $x=0$ 邻域, 式(12-47)化为 $\text{ad}_f g(x) = -AB + P_1(x)$ 。因为

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g(x) &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) = \frac{\partial P_0(x)}{\partial x} (Ax + f_2(x)) - A(B + P_0(x)) \\ &= -AB + P_1(x) \end{aligned}$$

该式成立。假设 $k=k$ 时在 $x=0$ 邻域成立, 证明 $k=k+1$ 时在 $x=0$ 邻域成立。因为

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^{k+1} g(x) &= \frac{\partial \text{ad}_f^k g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \text{ad}_f^k g(x) \\ &= \frac{\partial P_k(x)}{\partial x} (Ax + f_2(x)) - \left(A + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) ((-1)^k A^k B + P_k(x)) \\ &= (-1)^{k+1} A^{k+1} B + P_{k+1}(x) \end{aligned}$$

得证。

12.5.2.2 精确线性化问题可解的一个必要条件

定理 12.7 状态空间精确线性化问题可解的一个必要条件是, 系统在 $x = x^0$ 的线性近似是能控的, 即

$$\text{rank}[B : AB : \cdots : A^{n-1}B] = n$$

证明 由定理 12.6, 状态空间精确线性化问题可解的一个必要条件是

$$\text{rank}[g(x^0) : \text{ad}_f g(x^0) : \cdots : \text{ad}_f^{n-2} g(x^0) : \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)] = n$$

把式(12-47)逐个对应代入, 注意取 $x^0 = 0$, 得 $\text{rank}[B : AB : \cdots : A^{n-1}B] = n$ 。

12.6 相对阶 $r < n$ 系统的部分反馈线性化

12.6.1 相对阶 $r < n$ 系统的输入-状态线性化

本节讨论系统 $r < n$ 的第一种典型情况。这种情况下,系统状态方程满足定理 12.6 的精确线性化充要条件,可以找到使相对阶 $r = n$ 并实现精确线性化的函数 $\lambda(x)$ 。但是,却由于某种原因不便使用该函数,而须使用另外的函数 $h(x)$ 。相应的系统方程是

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

因为函数 $h(x)$ 对应的相对阶 $r < n$,而造成不能实现完全意义上的精确线性化。这种情况的特点和优势是,虽然 $\lambda(x)$ 不可使用,但 $\lambda(x)$ 是已知的。因为利用这一优势可以实现系统的输入和状态之间线性化,所以此种线性化也被称为输入-状态线性化(input-state linearization)。其实现步骤是,第一步,仍认为系统输出方程是 $y = \lambda(x)$,按正常程序按部就班地进行坐标变换和状态反馈,得到精确线性化结果;第二步,把输出方程 $y = z_1$ 替换为 $y = h(\phi^{-1}(z))$ 。所得到的最终结果与理想结果仅差在输出方程上,一般地说, $y = h(\phi^{-1}(z))$ 仍是 z 的非线性函数,没能被线性化。

例 12.3 (放弃有相对阶 $r = n$ 的输出函数而取其它输出函数时的线性化)本例的系统与例 12.1 相同。由例 12.1 我们已经知道系统

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x) + g(x)u &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = h(x) &= x_3\end{aligned}$$

有相对阶 $r = n$,且最终能变换为线性的和能控的系统。本例讨论放弃输出函数 $y = h(x) = x_3$,而取 $y = h(x) = x_1$ 。由 $L_g h(x) = \exp(x_2) \neq 0$ 可知这时的相对阶 $r = 1 < n$ 。

第一步,仍认为输出函数 $y = h(x) = x_3$,如同例 12.1,求得状态反馈。

$$u = \frac{-L_f^n h(x) + v}{L_g L_f^{n-1} h(x)} = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} v$$

和坐标变换 $z_1 = h(x) = x_3; z_2 = L_f h(x) = x_1 - x_2; z_3 = L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$ 。变换后得

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= z_1\end{aligned}$$

第二步,把输出方程代换为 $y = x_1|_{x=\phi^{-1}(z)} = z_2 - 0.5 \pm 0.5 \sqrt{1 - (z_2 + z_3)}$ 。可见输出方程结果不是线性的。

12.6.2 相对阶 $r < n$ 系统的输入-输出线性化

本节讨论系统 $r < n$ 的第二种典型情况。这种情况下,相对阶 $r < n$ 的系统不满足精

确线性化基本充要条件,难以使用本章和上一章介绍的方法实现状态空间精确线性化。造成系统相对阶 $r < n$ 的原因有多种。这既可能是系统状态方程固有特性决定的,也可能是输出函数选择不当所导致的。后一情况也包括系统状态方程满足精确线性化充要条件,但因为偏微分方程难以求解等原因,得不到理想输出函数的情况。

相对阶 $r < n$ 的系统应降低要求,按以下方法做部分反馈线性化。这种部分反馈线性化也被称为输入-输出线性化(input-output linearization)或外部线性化(external linearization),因为可保证系统的输入和输出间有理想的线性关系。

这种部分线性化方法可归结为两步:第一步,按第 11 章方法得到正则形式式(11-22)或准正则形式式(11-29);第二步,取状态反馈

$$u = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v) = \alpha(z) + \beta(z)v \quad (12-48a)$$

$$\text{即} \quad u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}(-L_f^r h(x) + v) = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (12-48b)$$

结果得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= v \end{aligned} \quad (12-50a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (12-50b)$$

或

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= v \end{aligned} \quad (12-50a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)(\alpha(z) + \beta(z)v) = \bar{q}_{r+1}(z) + \bar{p}_{r+1}(z)v \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)(\alpha(z) + \beta(z)v) = \bar{q}_n(z) + \bar{p}_n(z)v \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (12-50b)$$

式中

$$q_i(z) = L_f \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad r+1 \leq i \leq n \quad (12-51a)$$

$$p_i(z) = L_g \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad r+1 \leq i \leq n$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_i(z) &= q_i(z) + p_i(z)\alpha(z) \quad r+1 \leq i \leq n \\ \bar{p}_i(z) &= p_i(z)\beta(z) \quad r+1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (12-51b)$$

令

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{r+1} \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} \quad \bar{p} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{r+1} \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} \quad (12-52a)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r \times r} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r \times 1} \quad (12-52b)$$

得式(12-49)的简化表达式

$$\dot{\xi} = A_{11} \xi + B_1 v \quad (12-53a)$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) \quad (12-53b)$$

$$y = z_1 \quad (12-53c)$$

和式(12-50)的简化表达式

$$\dot{\xi} = A_{11} \xi + B_1 v \quad (12-54a)$$

$$\dot{\eta} = \bar{q}(\xi, \eta) + \bar{p}(\xi, \eta) v \quad (12-54b)$$

$$y = z_1 \quad (12-54c)$$

按式(12-53)可绘出系统结构框图(图12-4)。按式(12-54)得到的系统结构框图与此稍有不同。

从结构上说,式(12-49)的 $r < n$ 系统包含两大部分。一部分是积分器串构成的线性子系统,它决定了系统的输入输出工况(见图12-4上方)。另一部分是一个

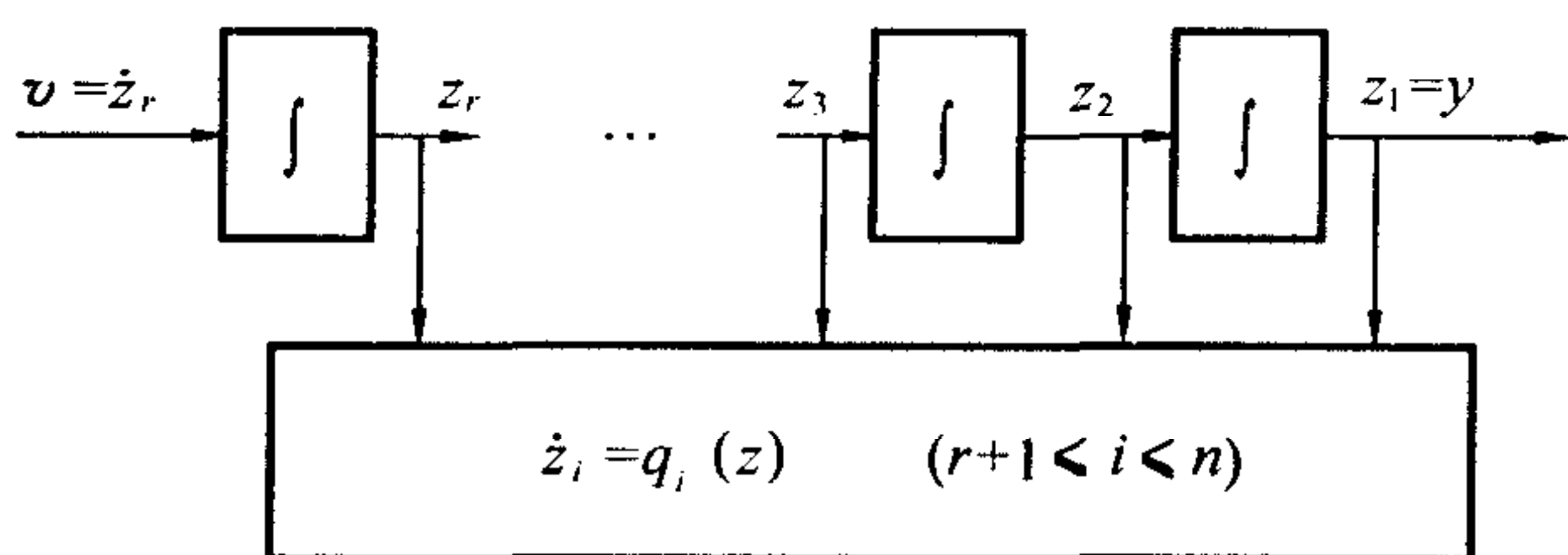


图12-4 部分线性化系统结构框图

$n-r$ 维非线性系统(见图12-4下方),它表示系统的内部工况,其状态 η 不影响输出。对第一部分,积分器串包含着 r 个积分器。如果系统相对阶 $r = n$,则系统只包含第一部分,否则出现第二部分。第二部分不会影响系统各输出,是不能观部分,所对应的共 $n-r$ 个状态 η 被称为内部状态。状态 η 中的一部分状态或全部状态可能会受输入 v 和外部状态 ξ 的影响,也可能 η 中所有状态都不受输入 v 和外部状态 ξ 的影响。

不论是否 $r = n$,只要相对阶有定义,系统的输入-输出工况都是线性系统工况。此性质可表述为定理12.8。

定理12.8 对一个在点 x^0 有相对阶 r 的非线性系统,可用状态反馈

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + v)$$

把它变换为一个其输入输出工况等同于传递函数

$$H(s) = \frac{1}{s^r}$$

的线性系统。

12.6.3 系统输入输出线性化的总变换式

从式(11-1)的原始系统方程到最终结果式(12-53),经历了坐标变换和状态反馈两步操作。总的结果可以概括成总变换关系

$$\begin{bmatrix} A_{11} \xi \\ q(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (12-55a)$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x)\beta(x) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (12-55b)$$

式中, A_{11}, B_1 是 r 阶 Brunovsky 标准形, 见式(12-52b)。

从式(11-1)的原始系统方程到最终结果式(12-54),也经历了坐标变换和状态反馈两步操作。总的结果可以概括成总变换关系

$$\begin{bmatrix} A_{11} \xi \\ -q(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (12-56a)$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ -p(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x)\beta(x) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (12-56b)$$

12.6.4 相对阶 $r < n$ 系统输入输出线性化后的平衡点

对原系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

平衡点 x^* 是指满足式 $f(x)=0$ 的 x 点。对线性化后的系统式(12-53),平衡点 z^* 被定义为满足 $A_{11}\xi=0, q(\xi, \eta)=0$ 的点。因为我们总希望反馈线性化后的系统的平衡点在原点,即 $z=0$,所以感兴趣的问题是 $z=0$ (不一定是平衡点)的原像点 x^* 在什么位置。第一种情况,研究在既有坐标变换,又施加反馈情况下 $z=0$ 的原像点 x^* 。由式(12-17)和式(11-22),这种情况下, $z=0$ 的原像点 x^* 包括同时满足条件

$$h(x^*)=0 \quad (12-57a)$$

$$f(x^*)=0 \quad (12-57b)$$

的点。更一般地和无遗漏地说,应位于满足条件

$$h(x^*)=0 \quad (12-58a)$$

$$L_f^{i-1}h(x^*) = \frac{\partial L_f^{i-2}h}{\partial x} f(x^*) = 0 \quad 2 \leq i \leq r \quad (12-58b)$$

$$q_i(x^*) = L_f \phi_i(x^*) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} f(x^*) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n \quad (12-58c)$$

的点上。

第二种情况,在只进行坐标变换不施加状态反馈的情况下,与原像点条件所不同的,只是要把式(12-58b)中的 $2 \leq i \leq r$ 改为 $2 \leq i \leq r+1$ 。

12.7 反馈线性化时的相对阶最大化问题

12.7.1 相对阶最大化问题的提出

定理 12.6 的两充要条件只含 $f(x), g(x)$ 。这表明, 系统能否找到适当的输出函数 $\lambda(x)$ 使相对阶 $r = n$, 主要决定于 $f(x), g(x)$, 或说决定于系统的状态方程。满足定理 12.6 的两充要条件, 一般可找到使相对阶 $r = n$ 的输出函数 $\lambda(x)$ 。不满足定理 12.6 的两充要条件, 则不可能找到使相对阶 $r = n$ 的输出函数 $\lambda(x)$ 。另一方面, 输出函数 $\lambda(x)$ 的选择也很重要。在满足定理 12.6 两充要条件的情况下, 如果输出函数 $\lambda(x)$ 选择不当, 也不能实现相对阶 $r = n$, 而只能降格屈居 $r < n$ 。

在不满足定理 12.6 两充要条件, 即 $r < n$ 情况下, 实际上也有类似的问题。对于给定的 $f(x), g(x)$, 客观上存在一个最高可能达到的相对阶上限 $r_{\max} < n$ 。一般可找到使相对阶 $r = r_{\max}$ 的输出函数 $\lambda(x)$ 。如果输出函数 $\lambda(x)$ 选择不当, 则相对阶将不能实现 $r = r_{\max}$, 只能 $r < r_{\max}$ 。如何找到适当的输出函数 $\lambda(x)$, 使相对阶 $r = r_{\max}$ 的问题就是相对阶最大化问题(maximizing relative degree problem)。

12.7.2 由 $f(x), g(x)$ 决定的最大相对阶

不论系统的相对阶为 $r < n$ 还是 $r = n$, 都可以用下面的定理 12.10, 确定其最大可能的相对阶。在定理及定理证明中要用到对合闭包概念, 见第 3 章定义 3.9, 并且要用到对合闭包的如下性质(引理 12.9)。

引理 12.9 考虑一分布 Δ , 设实值函数 $\lambda(x)$ 满足 $d\lambda \in \Delta^\perp$, 并且 $d\lambda(x^0) \neq 0$, 则在 x^0 的一个邻域上有 $d\lambda \in (\text{inv}(\Delta))^\perp$, 其中 $\text{inv}(\Delta)$ 表示 Δ 的对合闭包。

证明 在 x^0 的邻域上, 因为对偶分布 $d\lambda$ 为 1 维, 所以分布 $\Gamma = (\text{span}\{d\lambda\})^\perp$ 为 $n-1$ 维, 并且因 λ 已找到, 由分布可积性定义知, Γ 是可积的。再由 Frobenius 定理, Γ 是对合的。另外, 由假设, $d\lambda \in \Delta^\perp$, 有 $\Delta \subset \Gamma$ 。因为按对合闭包定义, $\text{inv}(\Delta)$ 是包含 Δ 的最小对合分布, 所以必有 $\text{inv}(\Delta) \subset \Gamma$ 。两端求正交对偶即得

$$\text{span}\{d\lambda\} \in (\text{inv}(\Delta))^\perp$$

定理 12.10 对系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= \lambda(x)\end{aligned}$$

如可找到某整数 v , 对 x^0 附近所有 x 满足

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-2} g\})) = k < n \quad (12-59a)$$

并在 x^0 点有

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-1} g\})) = n \quad (12-59b)$$

则: (1) 存在一函数 $\lambda(x)$ 使系统在 x^0 有相对阶 v ;

(2) 任何其它可选择的输出函数 $\lambda'(x)$ 对应的系统相对阶将小于或等于 v 。

证明 请注意定理中的 v 就是最大可能的相对阶。首先, 证明在 $(\text{inv}(\text{span}\{g,$

$\text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-2} g\}^\perp$ 中选择任何一个 $d\lambda$ 并以 λ 做输出函数, 必可使相对阶为 v 。按对合闭包定义, 分布

$$\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-2} g\}) \quad (12-60)$$

是对合的, 由假设, 它是 k 维的, $k < n$ 。于是由 Frobenius 定理, 存在 $n - k$ 个函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-k}(x)$, 其全微分对偶向量场 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-k}$ 张成式(12-60)的零化子。如果我们在 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ 中任意取定一个做输出函数, 比如取 $\lambda(x)$, 则对 x^0 附近所有 x , 对式(12-60)中的向量场 $g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-2} g$ 满足

$$\langle d\lambda, g \rangle = \langle d\lambda, \text{ad}_f g \rangle = \dots = \langle d\lambda, \text{ad}_f^{v-2} g \rangle = 0$$

$$\text{即 } L_g \lambda(x) = L_{\text{ad}_f g} \lambda(x) = \dots = L_{\text{ad}_f^{v-2} g} \lambda(x) = 0 \quad (12-61a)$$

此外, 可证明

$$\langle d\lambda, \text{ad}_f^{v-1} g \rangle \neq 0$$

$$\text{即 } L_{\text{ad}_f^{v-1} g} \lambda(x^0) \neq 0 \quad (12-61b)$$

事实上, 如果不是这样, 非零的 $d\lambda(x^0)$ 将是 $(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-1} g\})^\perp$ 的一个元素。由引理 12.9, $d\lambda(x^0)$ 又是 $(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-1} g\}))^\perp$ 的一个元素。这造成了一个矛盾, 因为按假设式(12-59b), $(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-1} g\}))^\perp$ 的维数为零。于是必有式(12-61b)成立。

进一步, 由引理 11.1, 式(12-61a)等价于

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = \dots = L_g L_f^{v-2} \lambda(x) = 0 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域所有 } x$$

由式(11-2), 取 $s = m = 0$, 并注意到结果

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = \dots = L_g L_f^{v-2} \lambda(x) = 0$$

可证明

$$\begin{aligned} \langle d\lambda, \text{ad}_f^{v-1} g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{v-1} (-1)^i \binom{v-1}{i} \langle dL_f^i \lambda(x), g(x) \rangle \\ &= (-1)^{v-1} \langle dL_f^{v-1} \lambda(x), g(x) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{即 } L_{\text{ad}_f^{v-1} g} \lambda(x) = (-1)^{v-1} L_g L_f^{v-1} \lambda(x)$$

于是由式(12-61b)得

$$L_g L_f^{v-1} \lambda(x^0) \neq 0$$

这表明选输出函数 $\lambda(x)$ 将使系统有相对阶 v 。其次, 证明任何其它可选择的输出函数 $\lambda'(x)$ 对应的系统相对阶将小于或等于 v 。设输出函数 $\lambda'(x)$ 对应的系统相对阶为 r 。由引理 11.2 的证明过程得到的式(11-9)知, 应有

$$\langle d\lambda', g \rangle = \langle d\lambda', \text{ad}_f g \rangle = \dots = \langle d\lambda', \text{ad}_f^{r-2} g \rangle = 0$$

$$\text{即 } d\lambda' \in (\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{r-2} g\})^\perp$$

由引理 12.9, 又进一步得

$$d\lambda' \in (\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{r-2} g\}))^\perp$$

因为 $d\lambda'(x^0) \neq 0$, 维数为 1, 所以对 x^0 附近所有 x 必有

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{r-2} g\})) < n$$

对照假设式(12-59a)和式(12-59b)得 $r \leq v$ 。定理证毕。

注意此定理与定理 12.6 的关系。如果满足定理 12.6 的两条件, 相当式(12-59)中的整数 $v = n$, 说明最大相对阶为 n 。

12.7.3 有最大相对阶的输出函数

在由式(12-59)求得最大相对阶 v 之后,可进一步求出有最大相对阶的输出函数 $\lambda(x)$ 。按定理 12.10, $\lambda(x)$ 应满足微分方程

$$\langle d\lambda(x), (\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{v-2} g\}(x))) \rangle = 0 \quad (12-62)$$

一旦求得输出函数 $\lambda(x)$,就可在坐标变换后施加反馈控制

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{v-1} \lambda(x)} (L_f^v \lambda(x) + v)$$

使其输入输出工况等同于传递函数为 $H(s) = \frac{1}{s^v}$ 的线性系统。

例 12.4 为以下系统按相对阶最大化要求选择输出函数。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 - x_3^2 \\ x_3 + 2x_1^2 x_3 \\ x_1^2 \\ x_1 + x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

首先,检验是否存在一个输出函数 $\lambda(x)$,使系统在 x^0 有相对阶 $r = n$,即检查是否满足定理 12.6 的两个条件

$$\text{rank}[g \quad \text{ad}_f g \quad \text{ad}_f^2 g \quad \text{ad}_f^3 g] = 4 \quad (12-63a)$$

$$D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\} \quad \text{对合} \quad (12-63b)$$

对式(12-63a),通过计算得到

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}_f g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad}_f^2 g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2x_1^2 \end{bmatrix} \quad \text{ad}_f^3 g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4x_1 x_3 \\ -2x_1 \\ -4x_1(x_2 - x_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

可见满足式(12-63a)条件。对式(12-63b),由低维分布对合引理 12.7,显然应满足 $[g, \text{ad}_f g] \in \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$ 。但本例中

$$[g, \text{ad}_f g] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$[g, \text{ad}_f g] \notin \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$,分布 $\text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$ 不对合。这表明式(12-63b)不成立,不符合定理 12.6 的第二个条件。相对阶 $r \neq n$ 。同时,这也等于说,在 $v = 4$ 时不满足定理 12.10 的条件式(12-59)。

其次,退一步,检验 $v = 3$ 时是否可能满足定理 12.10 条件。由

$$\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g\}) = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, [g, \text{ad}_f g]\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\}) = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, [g, \text{ad}_f g], \text{ad}_f^2 g\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

可见,满足定理 12.10 条件。结果 $v=3$ 。

再次,解式(12-62)求 $\lambda(x)$ 。因为 $v=3$,代入式(12-62),得

$$d\lambda(x)(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g\}(x))) = 0$$

即

$$d\lambda(x)(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, [g, \text{ad}_f g]\}(x)) = 0$$

其解为

$$\lambda(x) = x_1$$

再其次,根据此 $\lambda(x)$ 和 $v=3$ 计算为线性化应施加的状态反馈

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 \lambda(x)} (-L_f^3 \lambda(x) + v) = -x_1^2 + v$$

和坐标映射变换

$$z_1 = \lambda(x) = x_1$$

$$z_2 = L_f \lambda(x) = x_2 - x_3^2$$

$$z_3 = L_f^2 \lambda(x) = x_3$$

并补选

$$z_4 = \phi_4 = x_4$$

显然已满足 $L_g \phi_4 = 0$ 要求。结果得

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = v$$

$$\dot{z}_4 = \left(\frac{\partial \phi_4}{\partial x} f(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = L_f \phi_4(\phi^{-1}(z)) = (x_1 + x_3^2)_{x=\phi^{-1}(z)} = z_1 + z_3^2$$

$$y = z_1$$

在最大的相对阶 $v=3$ 之下实现了精确线性化。

最后,作为练习,顺便检验一下 $v=2$ 是否也有可能满足定理 12.10 条件。算得

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g\})) = \dim \left(\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right) = 1 < 4$$

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, \text{ad}_f g\})) = \dim(\text{span}\{g, \text{ad}_f g, [g, \text{ad}_f g]\})$$

$$= \dim \left[\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] = 3 \neq 4$$

不满足定理 12.10 条件。这表明, $v=2$ 不是最大可能相对阶。

12.8 不当输出函数被给定情况下的完全线性化问题

12.8.1 问题的提出

满足定理 12.6 的两充要条件,一般可找到使相对阶 $r=n$ 的输出函数 $h(x)$ 。如果输出函数 $h(x)$ 选择不当,则相对阶将不能实现 $r=n$,只能 $r < n$ 。假如不当的输出函数 $h(x)$ 已选定,并且因某些客观条件限制, $h(x)$ 不再容许改变,这种情况下能否使系统的相对阶仍能达到 $r=n$,并实现完全线性化? 这种可能性是有的,虽然要求的条件式(12-67)一般较难以满足。这就是本节要讨论的问题。

12.8.2 对加反馈后的系统应用充要条件

对于满足定理 12.6 两条件的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (12-64)$$

来说,可行的途径是照常采用常规的坐标变换和状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + v)$$

得到如下的反馈后系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (12-65)$$

把此系统视为一新的系统,重新应用定理 12.6,要求满足以下两条件:

$$(1) \text{ 矩阵 } [\tilde{g}(x^0) \quad \text{ad}_{\tilde{f}} \tilde{g}(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{g}(x^0)] \text{ 的秩为 } n; \quad (12-66a)$$

$$(2) \text{ 分布 } D = \text{span}\{\tilde{g}, \text{ad}_{\tilde{f}} \tilde{g}, \cdots, \text{ad}_{\tilde{f}}^{n-2} \tilde{g}\} \text{ 在 } x^0 \text{ 的一个邻域是对合的。} \quad (12-66b)$$

此二条件中的(1)等价于

$$[g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)] \text{ 的秩为 } n \quad (12-67a)$$

事实上,因为 $\beta(x^0) \neq 0$,可推得

$$\begin{aligned} & \text{rank}[\tilde{g}(x^0) \quad \text{ad}_{\tilde{f}} \tilde{g}(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{g}(x^0)] \\ &= \text{rank}[g(x^0) \quad \text{ad}_{f+g\alpha} g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_{f+g\alpha}^{n-1} g(x^0)] \\ &= \text{rank}[g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)] \end{aligned}$$

此二条件中的(2)可改写成

$$[\text{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{g}, \text{ad}_{\tilde{f}}^j \tilde{g}] \in D \quad 0 \leq i, j \leq n-2 \quad \text{在 } x^0 \text{ 邻域} \quad (12-67b)$$

如果式(12-67a)和式(12-67b)被满足,则按定理 12.6,可通过反馈

$$v = \frac{-L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \tilde{v}$$

和坐标变换

$$z_i = L_f^i h(x) \quad 0 \leq i \leq n-1$$

实现完全精确线性化,得到线性能控系统。

定理 12.11 设系统式(12-64)在 $x = x^0$ 处相对阶为 r , $f(x^0) = 0, h(x^0) = 0$ 。存在局部定义在 x^0 邻域的一个形如 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ 的反馈和一个坐标变换 $z = \phi(x)$, 能把系统变换为以下线性能控系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bv \\ y &= Cz \end{aligned}$$

的充要条件是满足:

(1) 矩阵 $[g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)]$ 的秩为 n ;

(2) 对所有 $0 \leq i, j \leq n$ 和所有 x^0 邻域的 $x, \tilde{f}(x), \tilde{g}(x)$ 满足

$$[\text{ad}_f^i \tilde{g}(x^0), \text{ad}_f^j \tilde{g}(x^0)](x) = 0 \quad (12-68)$$

其中向量场

$$\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)\alpha(x) \quad \tilde{g}(x) = g(x)\beta(x)$$

和

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

证明 定理证明过程本书从略,请参见文献[1]第 213~215 页或[2]第 199~202 页。

第 13 章 零动态特性

本章讨论非线性系统的零动态问题。13.1 节定义了零输出问题,导出了零动态方程,给出了零输出问题的解。13.2 讨论了线性系统的零输出问题。13.3 节给出了非线性系统零动态特性的线性近似式,证明了相对阶在做线性近似前后是保持不变的。13.4 节讨论准确跟踪指定非零输出问题,并指出这实际上是一般控制问题的逆问题——逆系统问题。

13.1 非线性系统的零输出问题

13.1.1 跟踪指定输出问题

本章将研究一个接近理想化的问题——无误差地准确跟踪指定输出问题。后续章节还将进一步讨论渐近地跟踪指定输出的问题。在这个意义上,本章是后续章节的一个基础。但是,本章所讨论问题的意义,更大程度上还是理论上的。在本章中,非线性系统被作为一个理想化模型来研究,这个模型可清楚地表明内模块状态与系统输入、输出量之间的相互作用关系。本章的研究对象是相对阶 $r < n$ 的系统,因为 $r = n$ 系统不存在零动态,零输出问题无意义。

准确跟踪指定输出包括准确跟踪任意输出和准确跟踪零输出。我们将从准确跟踪零输出问题入手,然后把它推广到准确跟踪任意输出的情况。零输出问题的现实背景是,有很多以偏差量或均方差量作为输出量的随动系统和镇定系统,其理想输出为零。零输出是这类问题的理想追求。对于其它类问题来说,在它们经线性化变为正则形式和转换为 z 坐标后,系统的平衡点常被转移到原点,并有 $y = z_1$ 形式的输出,这时也常会关注零输出问题。可见零输出问题的讨论有一定的现实性和普遍意义。

13.1.2 零输出问题的定义

定义 13.1 如果存在,寻找由初始状态 x^0 与输入函数 u^* 组成的对子 (x^0, u^*) 。对 u^* 的要求是在 $t=0$ 一邻域所有 t 上有定义,并对该邻域所有 t 使系统输出 $y(t)$ 恒等于零。这个求对子 (x^0, u^*) 的问题被称为零输出问题(problem of zeroing the output)。

显然,如果零输出问题有解存在,则将意味着系统输出有理想的稳定性和理想的动、静态品质。

13.1.3 正则形式系统的零输出问题

13.1.3.1 系统假设和零动态方程

设原系统为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (13-1)$$

对于 $r < n$ 系统,其坐标变换后的正则形式方程见式(11-22),令

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (13-2)$$

得正则形式方程的简化表达形式

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots\end{aligned}\quad (13-3a)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ y &= z_1\end{aligned}\quad (13-3b)$$

下面把输出为零的条件代入系统方程,置

$$y(t) = z_1(t) = 0$$

于是有

$$\dot{z}_1(t) = \dots = \dot{z}_r(t) = 0$$

和

$$z_2(t) = \dots = z_r(t) = 0$$

综合写为

$$\dot{\xi}(t) = 0 \quad (13-4)$$

$$\xi(t) = 0 \quad (13-5)$$

这样,我们看到,在系统的输出恒等于零时,状态轨线被约束到 $\xi(t) = 0$ 。把 $\xi(t) = 0$ 代入式(13-3),得

$$0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t) \quad (13-6)$$

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad \eta(0) = \eta^0 \quad (13-7)$$

式(13-7)被称为零动态特性(zero dynamics)或零动态方程(zero dynamics equation)。

13.1.3.2 零输出问题的解

系统初始条件必须设定在 $\xi(0) = 0$, 而 $\eta(0) = \eta^0$ 可以任意选择。与此初始条件配对的控制由式(13-6)决定。输入必须是

$$u(t) = \frac{-b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))} \quad (13-8)$$

式中, $\eta(t)$ 是零动态方程式(13-7)的解。可见,控制必须随 $\eta(t)$ 的变化而立即改变。初始条件和对应的控制构成了零输出问题的解。对每组初始条件 $\xi(0) = 0$ 和 $\eta(0) = \eta^0$ 来说,控制式(13-8)是能保持输出恒等于零的唯一输入。式(13-7)的零动态特性所表示的是在零输出工况下,系统外部状态被箝到零时,系统内部状态 η 的运动规律。

例 13.1 (正则形式下的零动态问题求解,阐明零动态空间概念)非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_1$$

因为 $L_g h(x) = 0$, $L_g L_f h(x) = 1 + 3x_2^2$, 在 $3x_2^2 + 1 \neq 0$ 处系统的相对阶 $r = 2$ 。平衡点 $x^e = 0$, $h(x^e) = 0$ 。下面求其正则形式方程。从求坐标映射开始。

$$z_1 = h(x) = x_1$$

$$z_2 = L_f h(x) = x_3 - x_2^3$$

选取

$$z_3 = x_2 + x_3$$

计算与变换有关的参数,有

$$a(z) = L_g L_f h(\phi^{-1}(z)) = (3x_2^2 + 1)|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$b(z) = L_f^2 h(\phi^{-1}(z)) = (3x_2^3 + x_1^2 - x_3)|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$q(z) = L_f \phi_3(\phi^{-1}(z)) = (-x_2 + x_1^2 - x_3)|_{x=\phi^{-1}(z)} = z_1^2 - z_3$$

变换后,得正则形式方程

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = b(z_1, z_2, z_3) + a(z_1, z_2, z_3)u$$

$$\dot{z}_3 = z_1^2 - z_3$$

随后,解零输出问题。置 $y(t) = x_1(t) = z_1(t) = z_2(t) = x_3 - x_2^3 = 0$, 得

$$0 = b(z_1, z_2, z_3) + a(z_1, z_2, z_3)u$$

$$\dot{z}_3 = -z_3 \quad z_3(0) = z_3^0$$

初始条件是 $z_1^0 = z_2^0 = 0$, z_3^0 任意。零输出控制是

$$u = -\frac{b(z)}{a(z)}$$

零动态空间是

$$M = \{x \in R^3 : x_1 = 0 \text{ 且 } x_3 = x_2^3\}$$

这是 $x_2 - x_3$ 坐标平面上的一条立方曲线,零动态解轨迹点在此线上运动,并最终趋于平衡点。零动态轨线最后结果为

$$z_3 = z_3^0 e^{-t}$$

13.1.4 准正则形式系统的零输出问题

13.1.4.1 系统假设和零动态方程

设原系统为式(13-1)。对于 $r < n$ 系统,其坐标变换后的准正则形式方程见式(11-29),令

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_{r+1} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (13-9)$$

得准正则形式方程的简化表达形式

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots\end{aligned}\tag{13-10a}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)u \\ y &= z_1\end{aligned}\tag{13-10b}$$

准正则形式和正则形式所不同的是,在把 $\xi(t)=0$ 代入式(13-10)时,将得到

$$0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t)\tag{13-11}$$

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) + p(0, \eta(t))u(t) \quad \eta(0) = \eta^0\tag{13-12}$$

这时为消去式(13-12)中的 $u(t)$,要把由式(13-11)求得的

$$u(t) = \frac{-b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))}\tag{13-13}$$

代入式(13-12)。最后得到的准正则形式下的零动态特性为

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) - p(0, \eta(t)) \frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))} \quad \eta(0) = \eta^0\tag{13-14}$$

13.1.4.2 零输出问题的解

系统初始条件必须设定在 $\xi(0)=0$,而 $\eta(0)=\eta^0$ 可以任意选择。与此初始条件配对的控制由式(13-13)决定。

13.1.5 由系统方程直接获得零输出问题的解

13.1.5.1 零动态空间

由前面的结果知道,零输出时 $z_1 = z_2 = \dots = z_r = 0$,零动态只能在属于以下子集的 $z=0$ 邻域内演变

$$z^* = \{z \in R^n : z_1 = z_2 = \dots = z_r = 0\}$$

这是 $z=0$ 附近的一个 $n-r$ 维的光滑流形,被称为零动态空间(zero dynamics space),见图 13-1。零动态空间在坐标系下的表示是

$$\begin{aligned}z^* &= \{x \in R^n : h(x) = L_f h(x) = \dots \\ &= L_f^{r-1} h(x) = 0\}\end{aligned}$$

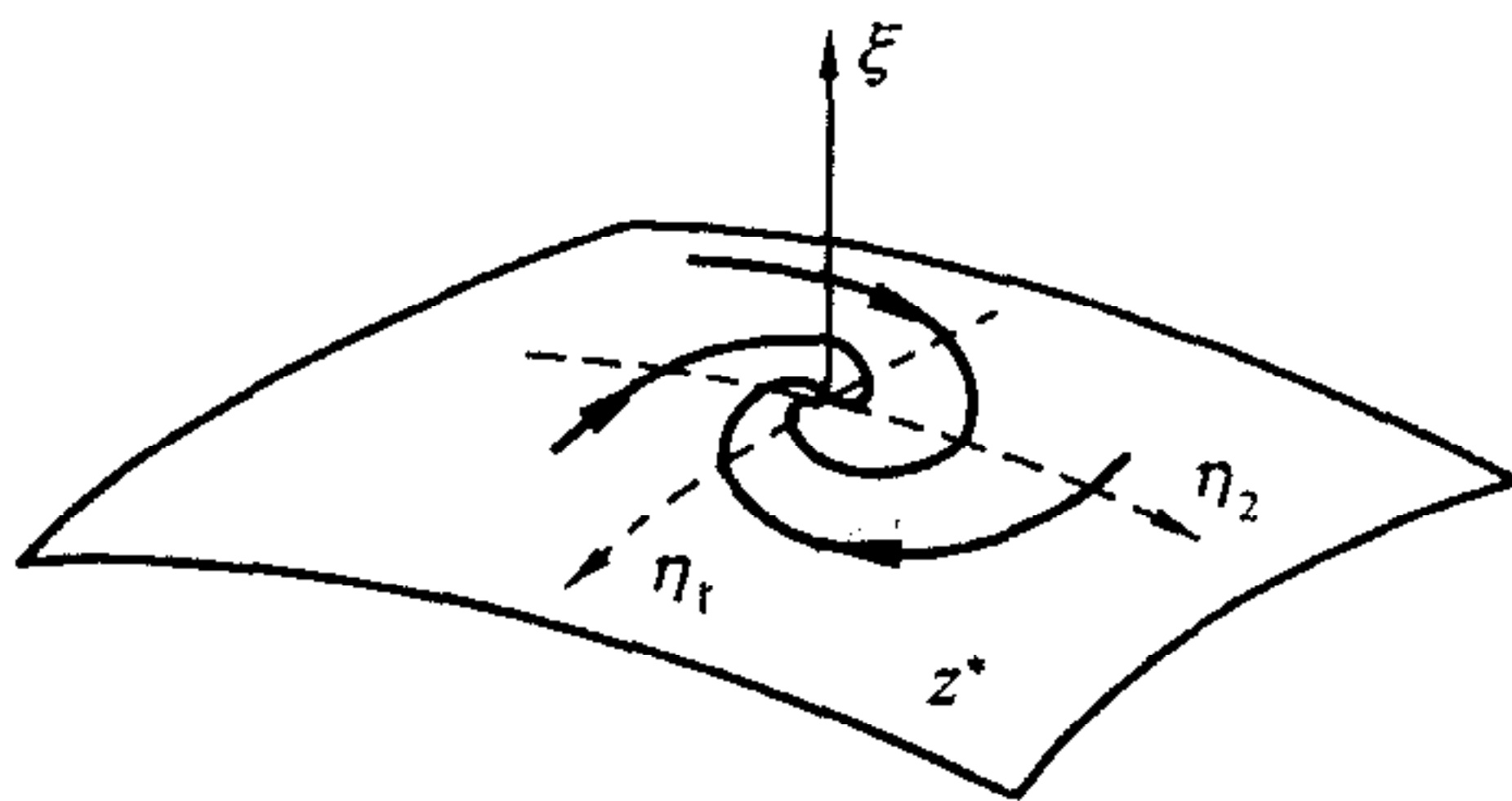


图 13-1 零动态空间

13.1.5.2 零输出问题的解

从系统方程出发, $y(t) \equiv 0$ 意味着 $y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t) = \dots = y^{(r-1)}(t) = 0$,还意味着

$$0 = y^{(r)}(t) = L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t))u(t)$$

由此,得零输出问题的控制

$$u^*(x) = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

式中, x 是 t 的函数。这是一个状态反馈。 (u^*, x^0) 构成零输出问题的解。可以证明,加了这一控制的系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u^*(x) = f^*(x)$$

并从 z^* 上一点出发的任何轨迹,将始终保持在 z^* 中(对小的 t),即 $f^*(x)$ 始终切于 z^* 。事实上,有

$$\begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r-2} h(x) \\ dL_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix} (f(x) + g(x)u^*(x)) = \begin{bmatrix} L_f h(x) + L_g h(x)u^*(x) \\ L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u^*(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) + L_g L_f^{r-2} h(x)u^*(x) \\ L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u^*(x) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

如果 $x \in z^*$ (这导致 $h(x) = L_f h(x) = \cdots = L_f^{r-1} h(x) = 0$) 可得

$$\begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r-2} h(x) \\ dL_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix} (f(x) + g(x)u^*(x)) = 0$$

这说明向量场 $f^*(x)|_{z^*}$ 切于 z^* 的论断成立。同时说明 $\dot{x} = f^*(x)$ 就是与 $\dot{\eta} = q(0, \eta(t))$ 相当的系统的零动态特性。

13.2 线性系统的零输出问题

13.2.1 线性系统正则形式的零输出问题

设线性定常系统的传递函数为

$$H(s) = K \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

系统的相对阶为 r 。设传递函数的分子和分母互质。此传递函数的一个最小实现是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-r-1} \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

现在, 让我们计算其正则形式。作为坐标映射, 前 r 个坐标取

$$\begin{aligned} z_1 &= Cx = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_{n-r-1} x_{n-r} + x_{n-r+1} \\ z_2 &= CAx = b_0 x_2 + b_1 x_3 + \cdots + b_{n-r-1} x_{n-r+1} + x_{n-r+2} \\ &\vdots \\ z_r &= CA^{r-1}x = b_0 x_r + b_1 x_{r+1} + \cdots + b_{n-r-1} x_{n-1} + x_n \end{aligned} \quad (13-15)$$

对其它 $n-r$ 个坐标, 有一定选择的自由, 但须满足定理 11.4 的条件。但是最简单的选择是

$$z_{r+1} = x_1, \quad z_{r+2} = x_2, \quad \cdots, \quad z_n = x_{n-r}$$

其 Jacobi 矩阵是

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-r-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-r-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}_{r \times (n-r)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-r-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{r \times r} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n-r) \times (n-r)} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n-r) \times r} \end{bmatrix}$$

可见, 矩阵是非奇异的。式中 * 号表示该元素可能是零, 也可能不是零。因为

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = C(Ax + Bu) = CAx = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \frac{\partial z_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = CA(Ax + Bu) = CA^2 x = z_3 \\ &\vdots \\ \frac{dz_r}{dt} &= \frac{\partial z_r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = CA^r x + CA^{r-1} Bu = R\xi + S\eta + Ku \end{aligned}$$

式中

$$R = [-a_0 \quad -a_1 \quad \cdots \quad -a_{r-1}] \quad (13-16)$$

$$S = [b_0 - a_r \quad b_1 - a_{r+1} \quad \cdots \quad b_{n-r-1} - a_{n-1}] \quad (13-17)$$

$$\frac{dz_{r+1}}{dt} = \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = \frac{\partial x_1}{\partial x}(Ax + Bu) = x_2 = z_{r+2}$$

...

$$\frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_{n-r-1}}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = \frac{\partial x_{n-r-1}}{\partial x}(Ax + Bu) = x_{n-r} = z_n$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_{n-r}}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = \frac{\partial x_{n-r}}{\partial x}(Ax + Bu) = x_{n-r+1}$$

由式(13-15), 得到

$$\frac{dz_n}{dt} = -b_0 x_1 - \cdots - b_{n-r-1} x_{n-r} + z_1 = -b_0 z_{r+1} - \cdots - b_{n-r-1} z_n + z_1$$

令

$$\xi = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_r]^T \quad \eta = [z_{r+1} \quad z_{r+2} \quad \cdots \quad z_n]^T$$

综合在一起得

$$\dot{\eta} = P\xi + Q\eta \quad (13-18)$$

式中

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-r-1} \end{bmatrix} \quad (13-19)$$

最后得正则形式方程为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\cdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= R\xi + S\eta + Ku \\ \dot{\eta} &= P\xi + Q\eta \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (13-20)$$

或表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} \\ \dot{z}_r \\ \dot{z}_{r+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{r-2} & -a_{r-1} & b_0 - a_r & b_1 - a_{r+1} & \cdots & b_{n-r-1} - a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-r-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K u \quad (13-21a)$$

$$y = z_1 \quad (13-21b)$$

式中

$$R = [-a_0 \quad -a_1 \quad \cdots \quad -a_{r-1}]$$

$$S = [b_0 - a_r \quad b_1 - a_{r+1} \quad \cdots \quad b_{n-r-1} - a_{n-1}]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-r-1} \end{bmatrix}$$

零输出的控制为

$$u = \frac{1}{K} S \eta \quad (13-22)$$

零动态方程是

$$\dot{\eta} = Q \eta \quad (13-23)$$

可见,线性系统零动态方程是一个线性方程,其特征多项式与传递函数的分子多项式一致, Q 的特征值与传递函数的零点一致。

例 13.2 (线性系统的正则形式的零动态特性)今有线性定常系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = [3 \quad 2 \quad 1]x$$

此系统的传递函数是

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{2s^3 + 4s^2 + 6s + 10}$$

其相对阶 $r=1$,平衡点 $x^e=0$ 。首先,求其正则形式方程。从求坐标映射开始。

$$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = (3x_1 + 2x_2 + x_3)$$

补上附加函数,要满足

$$L_g \phi_2(x) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} = 0$$

$$L_g \phi_3(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0$$

取定

$$\phi_2(x) = x_1 \quad \phi_3(x) = x_2$$

得变换和反变换

$$\begin{aligned} z_1 &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 & x_1 &= z_2 \\ z_2 &= x_1 & x_2 &= z_3 \\ z_3 &= x_2 & x_3 &= z_1 - 3z_2 - 2z_3 \end{aligned}$$

其平衡点 $z^e=0$,可求得有关参数

$$a(z) = L_g h(\phi^{-1}(z)) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} g \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = \frac{1}{2}$$

$$b(z) = L_f h(\phi^{-1}(z)) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} f \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = -5x_1|_{x=\phi^{-1}(z)} = -5z_2$$

$$q_2(z) = L_f \phi_2(\phi^{-1}(z)) = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} f \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = x_2|_{x=\phi^{-1}(z)} = z_3$$

$$q_3(z) = L_f \phi_3(\phi^{-1}(z)) = \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} f \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = x_3|_{x=\phi^{-1}(z)} = z_1 - 3z_2 - 2z_3$$

于是得正则形式方程

$$\dot{z}_1 = b(z) + a(z)u = -5z_2 + \frac{1}{2}u$$

$$\dot{z}_2 = q_2(z) = z_3$$

$$\dot{z}_3 = q_3(z) = z_1 - 3z_2 - 2z_3$$

$$y = z_1$$

其次,根据正则形式方程求零动态方程。置输出 $y(t) = z_1 = 0$, 于是 $\dot{z}_1 = 0$, 代入正则形式方程, 得

$$0 = -5z_2 + \frac{1}{2}u$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = -3z_2 - 2z_3$$

后二式就是零动态方程, 也可写成

$$\ddot{z}_2 + 2\dot{z}_2 + 3z_2 = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{z}_3 + 2\dot{z}_3 + 3z_3 = 0$$

此式的拉氏变换式是

$$(s^2 + 2s + 3)z_2(s) = 0 \quad \text{或} \quad (s^2 + 2s + 3)z_3(s) = 0$$

可见对于线性系统来说, 其零动态特征方程拉氏变换式 $s^2 + 2s + 3 = 0$ 左端与系统传递函数的分子多项式相同。最后, 给出零动态问题的解。由第一个方程可解得

$$u(t) = \frac{-b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))} = -10z_2$$

对应的初始条件是 $z_1^0 = 0, z_2^0, z_3^0$ 任意。零动态可由零动态方程求得

$$z_3(t) = e^{-t} \left(z_3^0 \cos \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} (z_3^0 + 3z_2^0) \sin \sqrt{2}t \right)$$

$$z_2(t) = e^{-t} \left(z_2^0 \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} (z_3^0 + z_2^0) \sin \sqrt{2}t \right)$$

零动态过程最后趋于稳定。

13.3 非线性系统零动态特性的线性近似

13.3.1 零动态方程的线性近似式

零动态方程线性近似式, 可通过下面的展开式得到

$$\dot{\eta}(t) = q(\xi(t), \eta(t)) = P\xi + Q\eta + q_2(\xi, \eta) \quad (13-24)$$

式中 $q_2(0, 0) = 0$ 。可求得, 在 $z = (\xi, \eta) = 0$ 的线性近似式是

$$\dot{\eta}(t) = Q\eta \quad (13-25)$$

式中

$$Q = \left[\frac{\partial q}{\partial \eta} \right]_{(\xi, \eta)=0} \quad (13-26)$$

式(13-25)被称为零动态方程在 $z = (\xi, \eta) = 0$ 的线性近似式。

13.3.2 相对阶在系统做线性近似后保持不变

零动态方程 $\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t))$ 保持着相对阶信息。零动态方程的阶数是 $n - r$, 零动态空间的维数是 $n - r$ 维。在已知系统维数的情况下, 相对阶可根据零动态方程阶数确定。因为当零动态方程做线性化转换为其线性近似式时, 其阶数在线性近似式中被保持, 所以, 自然得到相对阶在零动态方程转换为其线性近似式前后保持不变的结论。

相对阶在做线性近似前后保持不变的结论也适用于原始系统式(13-1)的线性近似。下面让我们来证明原始系统式(13-1)做线性近似后的相对阶等于原始非线性系统的相对阶。

证明从原始系统(13-1)做线性近似开始。设原始系统在 $x = 0$ 的相对阶为 r 。按展开式(12-42), 式(12-43)和式(12-44), 有

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax + f_2(x) \\ g(x) &= B + g_1(x) \\ h(x) &= Cx + h_2(x) \end{aligned}$$

并注意

$$f_2(0) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad g_1(0) = 0 \quad h_2(0) = 0 \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

得到原始系统在 $x = 0$ 的线性近似式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (13-27)$$

式中

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad B = g(x^e) = g(0) \quad C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

如果原始系统在 $x = 0$ 的线性近似式(13-27)的相对阶仍为 r , 显然应满足

$$CA^k B = 0 \quad k < r - 1$$

$$CA^{r-1} B \neq 0$$

注意这里 $CA^k B$ 是常数, 它在 $x = 0$ 点邻域的值等于 $x = 0$ 点的值。因为按定义, 知原系统的相对阶 r 满足

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \quad k < r - 1$$

$$L_g L_f^{r-1} h(0) \neq 0$$

所以要证明原始系统做线性近似后的相对阶等于原始非线性系统的相对阶, 只要证明

$$CA^k B = L_g L_f^k h(0) = 0 \quad k < r - 1$$

$$CA^{r-1} B \neq 0 \quad \text{或} \quad CA^{r-1} B = L_g L_f^{r-1} h(0) \neq 0$$

成立即可。事实上, 用数学归纳法容易证明

$$L_f^k h(x) = CA^k x + d_k(x) \quad k \leq r - 1$$

式中, 函数 d_k 满足

$$\left. \frac{\partial d_k}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

据此得

$$\begin{aligned} L_g L_f^k h(x) &= \frac{\partial (CA^k x + d_k(x))}{\partial x} (B + g_1(x)) \\ &= \left(CA^k + \frac{\partial d_k}{\partial x} \right) (B + g_1(x)) \end{aligned}$$

于是在点 $x=0$ 得

$$L_g L_f^k h(0) = CA_k B \quad k \leq r-1 \quad (13-28)$$

这就是要求的结果。

13.3.3 两条途径获得的 Q 结果相同

获得零动态方程的线性近似有两条途径：其一是，原始系统先转换为正则形式方程，并得到零动态方程，以后求零动态方程的线性近似式；其二是，原始系统先做线性近似，以后作为线性系统进行转换，得到正则形式的方程，并得到零动态方程的线性近似。这里将说明，两条途径获得的 Q 实际上是一样的。

首先，因为相对阶不因线性近似而改变， Q 的阶数决定于相对阶，所以 Q 的阶数与线性近似在前或在后的求法无关。其次，因为两途径都要变换为正则形式，都得到 $n-r$ 阶的 $\dot{\eta}$ 方程，所不同的只是一个

$$\dot{\eta}(t) = q(\xi(t), \eta(t)) = P\xi + Q\eta + q_2(\xi, \eta)$$

另一个是

$$\dot{\eta}(t) = P\xi + Q\eta$$

所以，在线性化后得到的零动态方程线性近似式 $\dot{\eta} = Q\eta$ 自然是一样的。

这里的讨论只限于两途径所做的变换都是结果为正则形式的变换，不包括结果为准正则形式的变换。因为本章中的矩阵 Q 是在正则形式情况下定义的。不应把在正则形式情况下定义的矩阵 Q 和在准正则形式情况下线性近似式右下角子阵混为一谈。两者一般不是同一个矩阵。

13.4 非线性系统的准确跟踪指定输出问题

13.4.1 准确跟踪指定非零输出问题定义

零输出问题强迫输出 $y \equiv 0$ ，事实上，强迫准确跟踪指定的一般输出 $y_R(t)$ 也是可能的。这被称为准确跟踪指定输出问题。如本章开头所指出的，零输出问题和准确跟踪指定输出问题，都是接近理想化的问题，因为它们都要求无误差地准确跟踪指定输出。下面给出准确跟踪指定输出问题的正式定义。

定义 13.1 如果存在，寻找由初始状态 x^0 与输入函数 u^* 组成的对子 (x^0, u^*) 。对 u^* 的要求是 u^* 在 $t=0$ 一邻域所有 t 上有定义，并对该邻域所有 t 使系统输出 $y(t)$ 与指定的输出 $y_R(t)$ 完全一致。这个求对子 (x^0, u^*) 的问题被称为准确跟踪指定输出 $y_R(t)$ 问

题(problem of reproducing the output $y_R(t)$)。

显然,如果准确跟踪指定输出问题有解存在,那么它将意味着系统输出具有理想的稳定性和理想的动、静态品质。此外,读者应当注意到,准确跟踪指定输出问题实际上是一般控制问题的逆问题,或者说是一个逆系统问题。一般控制问题是给定系统输入,分析其输出响应,而准确跟踪指定输出问题则恰好相反,给定输出,求需要的输入。

13.4.2 正则形式系统的准确跟踪指定输出问题

13.4.2.1 系统假设和零动态方程

设原系统为式(13-1)。对于 $r < n$ 系统,其正则形式方程的简化表达形式见式(13-3),即

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ y &= z_1\end{aligned}$$

把输出 $y = y_R(t)$ 的条件代入系统方程。置 $y(t) = z_1(t) = y_R(t)$, 于是有

$$\begin{aligned}z_2(t) &= \dot{z}_1(t) = y_R^{(1)}(t) \\ &\dots \\ z_r(t) &= \dot{z}_{r-1}(t) = y_R^{(r-1)}(t)\end{aligned}$$

以上结果可综合表示为

$$\xi = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_r)^T = (y_R(t) \ y_R^{(1)}(t) \ \dots \ y_R^{(r-1)}(t))^T = \xi_R(t) \quad (13-29)$$

随后把求得的 $\xi_R(t)$ 代入正则方程,得

$$\dot{z}_r(t) = y_R^{(r)}(t) = b(\xi_R(t), \eta(t)) + a(\xi_R(t), \eta(t))u(t) \quad (13-30)$$

$$\dot{\eta}(t) = q(\xi_R(t), \eta(t)) \quad (13-31)$$

13.4.2.2 准确跟踪指定输出问题的解

系统初始条件必须设定在 $\xi(0) = \xi_R(0)$, 而 $\eta(0) = \eta^0$ 可以任意选择。与此初始条件配对的控制由式(13-30)决定。输入必须是

$$u(t) = \frac{y_R^{(r)}(t) - b(\xi_R(t), \eta(t))}{a(\xi_R(t), \eta(t))} \quad (13-32)$$

式中, $\eta(t)$ 是零动态方程式(13-31)的解。可见控制必须随 $\eta(t)$ 的变化而即时改变。初始条件和对应的控制构成了准确跟踪指定输出问题的解。对每组初始条件 $\xi(0) = \xi_R(0)$ 和 $\eta(0) = \eta^0$ 来说,控制式(13-32)是能保持输出等于 $\xi_R(t)$ 的唯一输入。式(13-31)的动力学特性所表示的是在准确跟踪指定输出工况下,系统内部状态 η 的运动规律。

13.4.2.3 准确跟踪指定输出问题对应的逆系统

准确跟踪指定输出问题,实际上是一般控制问题的逆问题,或者说是一个逆系统问题。一般控制问题是给定系统输入,求其输出响应,而准确跟踪指定输出问题则恰好相反,给定输出,求需要的输入。如果把 $\xi_R(t)$ 视为多个输入,由式(13-29), $y_R(t)$ 是 $\xi_R(t)$ 向量的第

一个分量,把 $u(t)$ 视为输出, $\eta(t)$ 视为状态,则式(13-31)和式(13-32)可认为是原系统的一个逆系统。式(13-31)是状态方程,式(13-32)是输出方程。

$$\dot{\eta}(t) = q(\eta(t), \xi_R(t)) \quad (13-33)$$

$$u(t) = \frac{y_R^{(r)}(t) - b(\xi_R(t), \eta(t))}{a(\xi_R(t), \eta(t))} \quad (13-34)$$

此系统形式上是一个较仿射型系统更一般的系统,可归入

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

的一类。

第 14 章 局部渐近稳定性

本章讨论非线性系统的局部渐近稳定性问题。14.1 给出了局部渐近稳定性问题的定义。14.2 节讨论非线性系统局部稳定性的线性近似式分析法,给出了两种方法。其一是,基于系统线性近似式的分析方法,其二是,基于零动态特性线性近似式的分析方法。14.3 节讨论局部渐近稳定的临界问题,给出了一种零动态方法,一种放弃线性近似,转而使用非线性的零动态方程,直接分析非线性的零动态方程本身的渐近稳定性的分析方法。最后一节介绍一种用于临界稳定性分析的空输出方法。

14.1 非线性系统的局部渐近稳定性问题

14.1.1 局部渐近稳定性问题的定义

非线性系统在 Lyapunov 意义下的稳定性,指的是关于平衡点的稳定性。本章将袭用通常的 Lyapunov 意义下稳定性的有关概念,主要关注非线性系统在有光滑状态反馈情况下的稳定性分析方法。所要研究的问题可归结为下面定义的问题。

定义 14.1 对平衡点 $x^e = 0$ 的系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (14-1)$$

在原点的局部渐近稳定问题(local asymptotic stabilization problem)被定义为:如可能,寻找一个局部定义在点 $x = 0$ 邻域的光滑状态反馈 $u = \alpha(x)$,要求 $\alpha(0) = 0$,使加反馈后的闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) \quad (14-2)$$

局部渐近稳定于 $x = 0$ 。

求解系统的局部渐近稳定问题,意在找到状态反馈 $u = \alpha(x)$,实际上这是一个综合问题或设计问题。研究局部渐近稳定问题,需要了解非线性系统稳定性的有关分析方法。下节将介绍两种非线性系统稳定性的分析方法,同时给出局部渐近稳定问题的解法。

14.2 非线性系统稳定性的线性近似式分析法

14.2.1 基于系统线性近似式的局部稳定性分析

本小节介绍基于系统线性近似式的局部稳定性分析方法。本方法可归纳为以下几步。首先,求出系统的线性近似式。系统式(14-1)的线性近似式见式(12-45)。根据 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = 0$ 的展开式

$$f(x) = Ax + f_2(x)$$

$$g(x) = B + g_1(x)$$

得到的线性近似式是

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14-3)$$

其中

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \quad B = g(0)$$

其次,进行能控性结构分解。得到线性近似式(14-3)后,着手用线性系统理论中的方法对该近似式进行能控性结构分解,得到分解式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_c^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_c^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_c^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14-4a)$$

$$y = [\bar{C}_c \quad \bar{C}_c^-] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_c^- \end{bmatrix} \quad (14-4b)$$

此式未展开前的形式为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ y &= \bar{C} \bar{x} \end{aligned}$$

式中, $\bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c$ 表示能控分解后得到的 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中的能控部分; $\bar{A}_c^-, \bar{B}_c^-, \bar{C}_c^-$ 表示 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中的不能控部分。

最后,运用以下定理判断线性系统式(14-4)的稳定性。

定理 14.1 如果 (\bar{A}, \bar{B}) 对是全状态能控的,即只包括 \bar{A}_c, \bar{B}_c 部分,或 (\bar{A}, \bar{B}) 对是部分状态能控的,但不能控子阵 \bar{A}_c^- 的特征值(不能控振型)都具有负实部,则任何使线性近似式渐近稳定的线性反馈,也能使原非线性系统渐近稳定(可能只限于局部)。如果 (\bar{A}, \bar{B}) 对是部分状态能控的,且不能控子阵 \bar{A}_c^- 有某个或某些特征值(不能控振型)具有正实部,则任何反馈都不能使原非线性系统稳定。

证明 Lyapunov 间接方法指出:设 $x = 0$ 是非线性系统 $\dot{x} = f(x)$ 的一个平衡点, $f: D \rightarrow R^n$ 是连续可微的, D 是原点的邻域,设

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

则:(1)如果 A 的所有特征值有 $\text{Re} \lambda_i < 0$,则非线性系统的原点是渐近稳定的;(2)如果 A 的一个或多个特征值有 $\text{Re} \lambda_i > 0$,则非线性系统的原点是不稳定的。因此,所要证明的只是加反馈后是否满足 Lyapunov 间接方法的条件。

设 (\bar{A}, \bar{B}) 对是全状态能控的,即只包括 \bar{A}_c, \bar{B}_c 部分,或 (\bar{A}, \bar{B}) 对是部分状态能控的,但不能控子部 \bar{A}_c^- 的特征值(不能控振型)都具有负实部。取线性状态反馈 $u = Fx$, F 是能使 $A + BF$ 全部特征值均在左半复平面的矩阵,于是得到非线性闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)Fx = (A + BF)x + f_2(x) + g_1(x)Fx$$

因为其线性近似式中的 $A + BF$ 全部特征值均在左半复平面,所以非线性系统的原点是局部渐近稳定的。

设 (\bar{A}, \bar{B}) 对是部分状态能控的,且不能控子部 \bar{A}_c^- 有某个或某些特征值(不能控振型)具有正实部。取 $u = \alpha(x)$,这表示一个任意光滑状态反馈。加反馈后的非线性闭环系

统的线性近似式是

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial [f(x) + g(x)\alpha(x)]}{\partial x} \right]_{x=0} x = \left(A + B \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right]_{x=0} \right) x$$

其特征值具有正实部,并且与 α 选择无关。于是引用 Lyapunov 间接方法可得结论:非线性系统的原点是不稳定的。证毕。

例 14.1 (基于能控结构分解的局部稳定性分析)系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_3$$

首先,使系统在点 $x=0$ 做线性化,得到

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_3$$

其次,做结构分解。用观察法,可见 x_1, x_2, x_3 中每一个状态都是能控的。也就是说,不能控子阵 \bar{A}_c 是不存在的。最后,由定理 14.1,任何使线性近似式渐近稳定的线性反馈,都能使原非线性系统渐近稳定。

14.2.2 基于零动态方程线性近似式的局部稳定性分析

本方法不要求系统式(14-1)的线性近似式,但要求对零动态特性做线性化,方法可归纳为以下几步。首先,求非线性系统经坐标变换后的正则形式方程。系统式(14-1)的正则形式方程见式(13-3),正则形式方程的简化表达式是

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \end{aligned} \tag{14-5a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{14-5b}$$

其次,求正则形式方程的线性近似式。由式(13-20)得线性近似式

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \end{aligned} \tag{14-6a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= R\xi + S\eta + Ku \\ \dot{\eta} &= P\xi + Q\eta \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{14-6b}$$

式中

$$R = \left. \frac{\partial b}{\partial \xi} \right|_{(\xi, \eta)=0} \quad S = \left. \frac{\partial b}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta)=0} \quad (14-7)$$

$$P = \left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{(\xi, \eta)=0} \quad Q = \left. \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta)=0} \quad (14-8)$$

$$K = a(0,0) = L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(0,0)) = \left(\frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x} g(x) \right) \Big|_{x=x^e} \quad (14-9)$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} \\ \dot{z}_r \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & R^{1 \times r} & & S^{1 \times (n-r)} & \\ & & P^{(n-r) \times r} & & Q^{(n-r) \times (n-r)} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14-10a)$$

$$y = z_1 \quad (14-10b)$$

这里,式(14-10)已是一个线性系统,并且已经部分地完成了能控性分解。观察可知,状态阵 A 左上角 $r \times r$ 方阵是能控的,因此,其相应的特征值一定都是能布置的。由此,还可以进一步推断,所有不能布置特征值,如果存在,必包含在 A 阵右下角 $(n-r) \times (n-r)$ 方阵 Q 中。因为不能布置特征值在复平面上的位置,将决定系统是否能够通过反馈达到稳定,所以, Q 对系统稳定性有决定性作用。

因为 Q 是系统零动态方程线性近似式的状态矩阵,所以也称它为**零动态矩阵**。

最后,运用以下定理判断线性系统式(14-6)或式(14-10)的稳定性。

定理 14.2 在线性系统式(14-10)中,如果零动态矩阵 Q 不存在,或零动态矩阵 Q 存在,但其特征值都具有负实部,则任何使线性系统式(14-10)渐近稳定的线性反馈,都能使原非线性系统渐近稳定(可能只限于局部)。如果 Q 的某个或某些特征值具有正实部,则原非线性系统决不会被任何反馈稳定。

证明 本定理实际上是定理 14.1 的一个推论。因为 Q 中包含着系统可能有的全部不能布置特征值和不能控子阵,只要把定理 14.1 应用于系统式(14-10)即得证。

例 14.2 (基于零动态特性线性近似式的局部稳定性分析)系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_3$$

首先,求系统相对阶。

$$k=0 \quad L_g h(x)=0; k=1 \quad L_f h(x)=x_2, L_g L_f h(x)=1$$

故相对阶 $r=2$ 。其次,求坐标变换和正则形式。

$$z_1 = h(x) = x_3$$

$$z_2 = L_f h(x) = x_2$$

选

$$z_3 = 1 + x_1 - e^{x_2}$$

其正则形式为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= (z_3 - 1 + e^{z_2})z_2(z_3 - 2 + e^{z_2}) + u \\ \dot{z}_3 &= (-z_3 + 1 - e^{z_2})(1 + z_2 e^{z_2}) \\ y &= z_1\end{aligned}$$

再次,对此式在点 $z=0$ 做线性化,得

$$A_z = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= u \\ \dot{z}_3 &= -z_2 - z_3\end{aligned}$$

零动态方程 $\dot{z}_3 = -z_3$ 的特征值为 -1 。对应的零动态矩阵 $Q = -1$ 。最后,由定理 14.2,任何使线性近似式渐近稳定的线性反馈都能使原非线性系统渐近稳定。

14.2.3 零动态方程线性近似式状态矩阵 Q 与不能控子阵 \bar{A}_c 的关系

前两小节给出的两种局部渐近稳定性分析方法的共同点是都采用线性近似式。一个是使用系统方程的线性近似式和使用能控性分解式(14-4a)中的能控子阵 \bar{A}_c 和不能控子阵 \bar{A}_c ,另一个是使用线性化方程式(14-10)和零动态矩阵 Q 。现在的问题是不能控子阵 \bar{A}_c 和零动态矩阵 Q 之间有什么关系呢?对此作一讨论。

首先,不能控子阵 \bar{A}_c 是通过能控性结构分解得到的,其中包含了所有不能布置的特征值,而且其中所有特征值都是不能布置的。零动态矩阵 Q 则是通过零动态方程作线性化得到的,而不是通过能控性结构分解得到的,因此不确定其特征值的是否能布置。但观察式(14-10)可知,状态阵 A 左上角 $r \times r$ 方阵是能控的,说明不能控子阵 \bar{A}_c 中所有不能布置特征值,如果存在的话,必定都包含在零动态矩阵 Q 的特征值中。虽然 Q 中包含了所有不能布置的特征值,但其中也包含能布置的特征值,甚至所有的特征值都是能布置的。

作为实例,让我们看例 14.1 和例 14.2。同一个系统,在例 14.1 中求得不能控子阵 \bar{A}_c 不存在;在例 14.2 中求得零动态矩阵 Q 存在,是包含一个能控特征值的单元元素阵。

由此还可见,与零动态矩阵 Q 对应的状态是系统的内部状态。其中包含着系统全部的不能控状态,也包含着系统的一些能控状态。也就是说,内部状态不是全部不能控的,有一些是能控的,甚至全部都是能控的。

其次,由上述可知,零动态矩阵 Q 中包含的特征值个数必定要高于、至少等于不能控子阵 \bar{A}_c 中包含的特征值个数。

再次,零动态矩阵 Q 的阶数是 $n-r$,完全决定于相对阶 r (认为 n 是给定的),故不能控子阵 \bar{A}_c 的阶数只能低于或等于 $n-r$ 。

最后,能布置的特征值,包括 Q 中的能布置的特征值,都可以无例外地通过控制输入反馈在复平面上按稳定性要求加以布置。

14.3 局部渐近稳定的临界问题

14.3.1 局部渐近稳定临界问题的定义

定义 14.2 如果 (\bar{A}, \bar{B}) 对是不能控的,且不能控子阵 \bar{A}_c 包含虚轴上的特征值,但不含任何右半复平面特征值,则称之为临界情况。这种情况下的问题被称为局部渐近稳定的临界问题(critical problem of local asymptotic stabilization)。

14.3.2 局部渐近稳定临界问题的零动态方法

上节的以线性近似式为基础的稳定性判别方法定理 14.1 和定理 14.2,只能对 \bar{A}_c 特征值都在左半复平面,或 \bar{A}_c 至少有一个特征值在右半复平面的情况,也就是非临界情况,作出能否找到反馈使系统稳定的结论。而对于临界情况,即 \bar{A}_c 在右半复平面没有特征值,但在虚轴上有部分或全部特征值的情况,上节的线性近似式方法无能为力,必须改用其它方法判别。

本节要介绍的方法是零动态方法。这是有别于上一节的零动态方法,其区别是不再使用线性近似,而直接使用非线性的零动态方程。实际上,线性近似使我们丢失了一些有助于判断临界情况稳定性的有用信息。为了充分利用这些信息,只有放弃线性近似,转而使用非线性的零动态方程,直接分析非线性的零动态方程本身的渐近稳定性。

设所讨论的系统已经变换为正则形式,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{14-11}$$

今施加精确线性化反馈

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)}(-b(\xi, \eta) + v)$$

再外加配置特征值的线性状态反馈

$$v = -c_0 z_1 - c_1 z_2 \cdots - c_{r-1} z_r$$

于是得到一闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_\xi \xi \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{14-12}$$

式中

$$A_{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{r-1} \end{bmatrix}$$

A_{ξ} 对应的特征多项式是

$$p(s) = c_0 + c_1 s + \cdots + c_{r-1} s^{r-1} + s^r$$

下面将介绍用于判断稳定性(包括临界稳定性)的定理。首先给出证明该定理用的引理。

引理 14.3 考虑比式(14-12)系统更一般的系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{\xi} \xi + p(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (14-13)$$

假设对所有接近 0 的 η 有 $p(0, \eta) = 0$, 并且

$$\frac{\partial p}{\partial \eta}(0, 0) = 0$$

如果 $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ 在 $\eta = 0$ 点渐近稳定, 且 A_{ξ} 的特征值都有负实部, 则系统式(14-13)在 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 渐近稳定。

证明 请参见文献[1]第 442 页或文献[2]第 511 页, 本书从略。

定理 14.4 如果闭环系统式(14-12)的零动态特性 $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ 在 $\eta = 0$ 点是渐近稳定的, 且 A_{ξ} 的特征多项式 $p(s)$ 的根都在左半复平面, 则反馈

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} (-b(\xi, \eta) - c_0 z_1 - c_1 z_2 \cdots - c_{r-1} z_r) \quad (14-14)$$

可使系统式(14-11)在 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 渐近稳定。

证明 因满足引理 14.3, 于是得证。

在 x 坐标下, 式(14-14)对应于

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) - c_0 h(x) - c_1 L_f h(x) - \cdots - c_{r-1} L_f^{r-1} h(x)) \quad (14-15)$$

本定理所要求的条件是“ $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ 在 $\eta = 0$ 渐近稳定”, 定理 14.2 要求的条件是“零动态矩阵 Q 的特征值都具有负实部”。前一条件称为零动态方程的渐近稳定性; 后一条件称为零动态方程的线性近似式的渐近稳定性。本定理所要求的条件要弱于定理 14.2 要求的条件。比如, 临界情况下, 即 Q 的某些特征值具有零实部的情况下, 可能满足“ $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ 在 $\eta = 0$ 渐近稳定”的条件, 但不满足“零动态矩阵 Q 的特征值都具有负实部”的条件。

在使用本定理时, 要求知道零动态方程是渐近稳定的。非线性的零动态方程的渐近稳定性一般可用 Lyapunov 方法来判断。

下面的例子用线性近似式方法不能断定是否可通过状态反馈达到局部渐近稳定, 但改用本节的零动态方法后, 证明了该系统在加适当反馈后可达到局部渐近稳定。

例 14.3 (临界情况, 系统加反馈后稳定) 非线性系统(同例 11.5, 系统在 $x_3 \neq -1$ 时相对阶 $r = 2$)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_4$$

方法 1 (基于能控结构分解的方法,用定理 14.1):首先,求系统的线性近似式,得

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

式中

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} x_2 - 3x_1^2 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = g(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

展开后的系统线性近似式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

可求得此线性近似式对应的传递函数为

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s(s+1)}{s^3(s+1)}$$

其次,做能控性分解。用线性系统理论中的方法或本书第 8 章的非线性方法,通过坐标变换

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

可得到能控分解后系统为

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

结果表明,状态 z_4 不能控,右下角的 1×1 不能控子阵 $\bar{A}_c = 0$ 。因为不能控子阵 \bar{A}_c 有虚轴上的特征值,是临界问题,所以不宜用定理 14.1,必须改用适用于临界情况的定理 14.4。

方法 2 (基于零动态方程线性近似式的方法,用定理 14.2):在例 11.5 中已经通过非线性坐标变换把系统化为如下的准正则形式,本例将在此结果基础上继续往下做。

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = b(z) + a(z)u = z_4 + 2z_2z_4^2 - 4z_4^4 + (2 + 2z_3)u$$

$$\dot{z}_3 = q_3(z) + p_3(z)u = -z_3 + u$$

$$\dot{z}_4 = q_4(z) + p_4(z)u = -2z_4^3 + z_2z_4$$

首先,求零动态方程。令准正则形式中的 $z_1 = z_2 = 0$, 由 \dot{z}_2 式求得

$$u = -\frac{z_4 - 4z_4^4}{2 + 2z_3}$$

代入 \dot{z}_3 式,得到零动态方程为

$$\dot{z}_3 = -z_3 - \frac{z_4 - 4z_4^4}{2 + 2z_3} \quad (14-16)$$

$$\dot{z}_4 = -2z_4^3$$

其次,求零动态方程的线性近似式 $\dot{\eta} = Q\eta$ 。

$$Q = \left. \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} -1 + 2 \frac{z_4 - 4z_4^4}{(2 + 2z_3)^2} & -\frac{1 - 16z_4^3}{2 + 2z_3} \\ 0 & -6z_4^2 \end{bmatrix}_{(\xi, \eta) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征值为 0 和 -1。因为零动态矩阵(零动态线性近似式矩阵) Q 有虚轴上的特征值,是临界问题,所以不宜用定理 14.2,必须改用适用于临界方法的定理 14.4。

方法 3 (基于零动态方程的方法,用定理 14.4):系统的零动态方程见式(14-16),把该式重写为

$$\dot{z}_3 = -z_3 - \frac{z_4 - 4z_4^4}{2 + 2z_3} \quad (14-17)$$

$$\dot{z}_4 = -2z_4^3 \quad (14-18)$$

按定理 14.4,只要式(14-16)是渐近稳定的,本例的非线性系统就可通过式(14-15)的反馈达到局部渐近稳定。实际上,式(14-18)通过积分是独立可解的,并且是渐近稳定的。当 z_4 衰减后,式(14-17)的后项消失,式(14-18)也是渐近稳定的。对于本例,最后求得的应施加的反馈是

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f h(x)} (-L_f^2 h(x) - c_0 h(x) - c_1 L_f h(x)) \\ &= \frac{1}{2 + 2x_3} (-2x_1^2(x_2 + x_1^2) - x_1 - c_0 x_4 - c_1(x_2 + x_1^2)) \end{aligned}$$

14.3.3 小参考输入时的系统稳定性(小参考输入时的输入有界-状态有界性)

如果用下面的加上参考输入 \bar{v} 的反馈控制替代式(14-14)的反馈控制

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} (-b(\xi, \eta) - c_0 z_1 - c_1 z_2 \cdots - c_{r-1} z_r + \bar{v}) \quad (14-19)$$

则得到下面的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_\xi \xi + \bar{B} \bar{v} \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (14-20)$$

式中

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{r-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当参考输入 $\bar{v}=0$ 时,本系统退化为系统式(14-12)。

定理 14.5 如果 $x=0$ 是系统式(14-12)的渐近稳定平衡点,则对于足够小的参考输入 \bar{v} ,系统式(14-20)的轨线是有界的。更准确的说法是:对每个 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 和 $K > 0$,只要

$$\|x(0)\| < \delta \quad \text{且} \quad |\bar{v}(t)| < K \quad \forall t \geq 0$$

就有

$$\|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

证明 见文献[1]或文献[2]的附录 B.2。

14.4 渐近稳定性分析中的空输出和变量捆绑技巧

14.4.1 问题的提出

在用零动态方法分析渐近稳定性时,必须先定义输出函数。不定义输出函数,没有相对阶,零动态方程随之无定义。如果要分析的是一个非临界稳定性问题,可考虑采用不依赖于输出函数,即不依赖于零动态方程的能控结构分解方法(定理 14.1)。但如果是临界稳定性问题,则会遇到困难。采用空输出,即虚拟的输出,是克服困难的一个途径。

非线性系统的稳定性在一些情况下会表现出阶段特性,比如当系统的快暂态未衰减之前,系统是渐近稳定的,但衰减之后则有相反趋势的特性,表现出不稳定的特性。这时可考虑使用变量捆绑技巧。在快暂态和慢暂态间建立起适当的约束,把它们捆绑在一起,使系统稳定。捆绑的方法之一是利用零输出。比如,通过把相关的变量之差选作输出函数,并实施零输出设计来实现变量的捆绑。同时,这也是零输出的一个特别的应用实例。

14.4.2 技巧应用实例

例 14.4 (空输出,变量捆绑,零输出在系统稳定控制中的应用)设计控制 u ,使以下非线性系统实现局部渐近稳定

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其平衡点 $x^e = 0$,方程展开后为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \end{aligned}$$

方法 1 (能控结构分解法)首先求系统的线性近似式,得

$$\dot{x} = Ax + Bu = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} + g(0)u = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^3 & 3x_1^2 x_2^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{x=0} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

观察可知,特征值所对应的状态 x_2 是能控的,特征值所对应的状态 x_1 是不能控的。因为不能控子阵中有虚轴上的特征值,必须改用其它方法,比如,定理 14.4 给出的方法。

方法 2 (零动态特性方法) 首先,选择输出函数。为使零动态特性有定义,必须定义输出函数。这里不妨定义一个不实际的输出,但使系统渐近稳定的输出,称它为空输出。让我们分析本例,看如何选择输出函数。方法 1 已指出状态 x_2 是能控的,因此,通过反馈可使其达到稳定,但随之而来的问题是,在 x_2 渐近稳定归零后,将得到 $\dot{x}_1 = 0$, x_1 将失去控制。解决问题的对策之一是,在状态变量 x_1 和 x_2 之间建立牵连关系,把它们捆绑在一起,使它们一起衰减。为此,在其间建立函数关系,令

$$x_2 = \gamma(x_1)$$

这样,原非线性方程将变为

$$\dot{x}_1 = x_1^2 (\gamma(x_1))^3 \quad (14-21)$$

为迫使 $x_2 = \gamma(x_1)$, 取 $y = x_2 - \gamma(x_1)$, 并作为零输出问题来求解。对函数 $x_2 = \gamma(x_1)$ 的选择要求是,使式(14-21)渐近稳定。对此,可以用 Lyapunov 方法来设计。取 Lyapunov 函数 $V = x_1^2 > 0$, V 沿解轨线的导数

$$\dot{V} = 2x_1 \dot{x}_1 = 2x_1^3 (\gamma(x_1))^3$$

为使 $\dot{V} < 0$, 可选 $\gamma(x_1) = -x_1$, 从而输出函数应选

$$y = h(x) = -x_1 - x_2$$

补充了输出函数后的原系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \\ y &= -x_1 - x_2 \end{aligned}$$

因为

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = -1 \neq 0$$

知系统相对阶 $r=1$ 。下面,在非零输出情况下分析此系统的稳定性。此系统的稳定性分析问题是临界问题。为应用定理 14.4,应先检查其零动态方程是否有渐近稳定性。按以下步骤进行。

其次,求正则形式方程。确定了输出函数之后,考虑坐标变换映射在

$$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = -x_1 - x_2$$

之外,选

$$z_2 = \phi_2(x) = x_1$$

满足了

$$L_g \phi_2(x) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} g(x) = 0$$

的要求。其逆变换为

$$\begin{aligned} x_1 &= z_2 \\ x_2 &= -z_1 - z_2 \end{aligned}$$

于是得正则形式方程

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \dot{x} \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^3 \\ x_2 \end{bmatrix} \bigg|_{x=\phi^{-1}(z)} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ &= (-x_1^2 x_2^3 - x_2)_{x=\phi^{-1}(z)} - u = z_2^2 (z_2 + z_1)^3 + z_2 + z_1 - u\end{aligned}\quad (14-22a)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} \dot{x} \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^3 \\ x_2 \end{bmatrix} \bigg|_{x=\phi^{-1}(z)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ &= x_1^2 x_2^3 \big|_{x=\phi^{-1}(z)} = -z_2^2 (z_2 + z_1)^3\end{aligned}\quad (14-22b)$$

$$y = z_1 \quad (14-22c)$$

再次,求零动态方程,并检查其渐近稳定性。把 $y = z_1 = 0$ 代入式(14-22),得零动态方程和零输出控制律

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= -z_2^5 \\ u &= z_2^5 + z_2\end{aligned}$$

可见零动态方程是渐近稳定的,满足了定理 14.4 的一个条件。

最后,设计稳定控制律。由定理 14.4,如果 A_ε 的特征多项式 $p(s) = c_0 + s$ 的根都在左半复平面,即 $c_0 > 0$,则这一临界稳定问题,在反馈控制

$$u = \frac{1}{a(z)} (-b(z) - c_0 z_1)$$

下,可达到在平衡点 $z=0$ 的渐近稳定。因为

$$a(x) = L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$b(x) = L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^3 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1^2 x_2^3 - x_2$$

临界稳定问题要求的反馈控制是

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{a(x)} (-b(x) + v) = \frac{1}{L_g h(x)} (-L_f h(x) - c_0 h(x)) \\ &= -(x_1^2 x_2^3 + x_2) - c_0 (x_1 + x_2)\end{aligned}$$

转换为 z 坐标

$$u = z_2^2 (z_1 + z_2)^3 + z_1 + z_2 + c_0 z_1$$

零输出要求 $y = z_1 = 0$, 即 $x_1 = -x_2$, 包括要满足 $z_1^0 = 0$, 即 $x_1^0 = -x_2^0$ 。把此条件代入, 得

$$u = z_2^5 + z_2$$

第 15 章 渐近跟踪指定输出问题

本章讨论渐近跟踪指定输出问题。15.1 节给出了渐近跟踪指定输出问题的定义和以误差为状态的系统方程,讨论了状态有界性问题。15.2 节讨论了渐近跟踪参考模型输出问题,最后给出了静态状态反馈控制和动态反馈控制的定义。

15.1 渐近跟踪指定输出函数

15.1.1 渐近跟踪指定输出问题的定义

在准确跟踪指定输出问题中,不切实际的要求是对初始条件的要求。要求在 $t=0$ 时刻 $z_1(0)=y_R(0), z_2(0)=y_R^{(1)}(0), \dots, z_r(0)=y_R^{(r-1)}(0)$ 都相吻合,完全没有自由分量,无论如何都难以达到。相对来说,下面的问题提法要现实得多。

定义 15.1 寻求一个控制,使系统输出在任意的初始条件下,都能渐近地收敛到指定的参考函数 $y_R(t)$ 。此问题被称为渐近跟踪指定输出问题 (problem of asymptotically tracking a reference output $y_R(t)$)。

15.1.2 以误差为状态的系统方程

假设所讨论系统已经变换为正则形式的系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ z_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{15-1}$$

为便于进行渐近跟踪问题的研究,系统方程应转换为以误差为状态变量的形式。首先,让我们定义误差。这里,误差 $e(t)$ 被定义为实际输出 $y(t)$ 与指定参考输出 $y_R(t)$ 之差,即

$$e(t) = y(t) - y_R(t)$$

其次,在着手建立以误差为状态变量的系统方程之前,必须先给定控制律。为达到对指定输出的渐近跟踪,所采用的控制应当在准确跟踪的控制式(13-32)的基础上加以改进。实际所做的改进是额外增加了能实现渐近跟踪有关的项

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} (-b(\xi, \eta) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1}(z_i - y_R^{(i-1)})) \tag{15-2}$$

此控制律在 x 坐标下的表示为

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} (L_f^{(i-1)} h(x) - y_R^{(i-1)})) \quad (15-3)$$

注意到

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ z_2 &= \dot{z}_1 = \dot{y} \\ &\dots \\ z_r &= \dot{z}_{r-1} = y^{(r-1)} \end{aligned}$$

把它们代入式(15-2)以后,得控制律的另一形式

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} (-b(\xi, \eta) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} e^{(i-1)}) \quad (15-4)$$

再次,着手推导前 r 个状态的状态方程。把控制式(15-4)代入正则形式方程式(15-1)的 \dot{z}_r 式(代入后得到的是系统闭环方程),注意到 $\dot{z}_r = y^{(r)}$,把左端 \dot{z}_r 写为 $y^{(r)}$,代入后的结果是

$$y^{(r)} = y_R^{(r)} - c_{r-1} e^{(r-1)} - \dots - c_1 e^{(1)} - c_0 e$$

即

$$e^{(r)} + c_{r-1} e^{(r-1)} + \dots + c_1 e^{(1)} + c_0 e = 0 \quad (15-5)$$

这是以误差为状态的系统状态方程(前 r 个)的高阶形式。为化成一般状态方程形式,定义误差向量

$$\chi(t) = (e(t) \quad e^{(1)}(t) \quad \dots \quad e^{(r-1)}(t))^T$$

随后把式(15-5)的 r 阶微分方程化为 r 个一阶微分方程,其结果就是以误差为状态的系统状态方程(前 r 个)

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} e^{(1)} \\ e^{(2)} \\ \vdots \\ e^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_0}{c_1} & & & \\ -\frac{c_0}{c_2} & -\frac{c_1}{c_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{c_0}{c_r} & -\frac{c_1}{c_r} & \dots & -\frac{c_{r-1}}{c_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(r-1)} \end{bmatrix} = K\chi \quad (15-6)$$

原正则形式方程以 ξ, η 为状态变量, ξ 与 χ 的关系可推导如下。注意到

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_r(t))^T = (y(t) \quad y^{(1)}(t) \quad \dots \quad y^{(r-1)}(t))^T \\ \chi(t) &= (e(t) \quad e^{(1)}(t) \quad \dots \quad e^{(r-1)}(t))^T \end{aligned}$$

和

$$\xi_R(t) = (y_R(t) \quad y_R^{(1)}(t) \quad \dots \quad y_R^{(r-1)}(t))^T$$

得

$$\xi(t) = \xi_R(t) + \chi(t) \quad (15-7)$$

再其次,推导内动态方程。把式(15-7)代入正则形式方程式(15-1),得

$$\dot{\eta} = q(\xi_R + \chi, \eta)$$

再代入式(15-4)得渐近跟踪指定输出函数的控制律,为

$$u = \frac{1}{a(\xi_R + \chi, \eta)} (-b(\xi_R + \chi, \eta) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} e^{(i-1)}) \quad (15-8)$$

应当指出的是,上面得到的控制律,包括式(15-2)、式(15-3)、式(15-4)、式(15-8)都是等价的,只是表达形式上有所不同,它们分别被用于不同的情况下。

综上,最后得以 χ 和 η 为状态的系统方程

$$\dot{\chi} = K\chi \quad (15-9a)$$

$$\dot{\eta} = q(\xi_R + \chi, \eta) \quad (15-9b)$$

式中, $\xi_R(t)$ 是输入量。

推导过程表明,在式(15-4)的控制律下,误差函数 e 满足一个 r 阶线性微分方程式(15-5)。其特征方程是

$$s^r + c_{r-1}s^{r-1} + \cdots + c_1s + c_0 = 0$$

因为系数 c_0, \dots, c_{r-1} 可任意选择,所以特征方程的根可按要求任意配置,可达到误差快速指数衰减,最后收敛到零,从而实现渐近跟踪指定输出的要求。

和准确跟踪指定输出问题一样,渐近跟踪指定输出问题也是一般控制问题的逆问题,或称逆系统问题。一般控制问题是给定系统输入,求其输出响应,而渐近跟踪指定输出问题则恰好相反,给定输出,求需要的输入。如果把 $\xi_R(t)$ 视为多个输入($y_R(t)$ 是 $\xi_R(t)$ 向量的第一个分量),把 $u(t)$ 视为输出,把 $\chi(t), \eta(t)$ 视为状态,把式(15-9)视为状态方程,把式(15-8)视为输出方程,则式(15-9)和式(15-8)可认为是原系统的一个逆系统。

15.1.3 跟踪工况下内外状态的有界性

一个闭环系统跟踪一有界参考输出并且跟踪响应有界时,限制其内部变量有界的做法,原则上是不必要的。如果确有必要对内部变量加以限制,有下面的定理可以利用。该定理给出了外部状态和内部状态 $z_i(t)$ 有界的充分条件。

定理 15.1 设(1)指定参考输出 $y_R(t), y_R^{(1)}(t), \dots, y_R^{(r-1)}(t)$, 即 $\xi_R(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 有界;(2)在上面的参考输出 $\xi_R(t)$ 的作用下,内动态方程 $\dot{\eta} = q(\xi_R(t), \eta)$ 在初始条件 $\eta(0) = 0$ 下的解记为 $\eta_R(t)$, 从而 $\eta_R(0) = 0$ 。假设 $\eta_R(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 有定义、有界且一致渐近稳定;(3)假设方程

$$s^r + c_{r-1}s^{r-1} + \cdots + c_1s + c_0 = 0$$

的根具有负实部;(4)如果在某时刻 $t_0 \geq 0$ 时,对足够小的 $\alpha > 0$, 有

$$|z_i(t_0) - y_R^{(i-1)}(t_0)| < \alpha \quad 1 \leq i \leq r$$

和

$$\|\eta(t_0) - \eta_R(t_0)\| < \alpha$$

则式(13-1),式(15-4)构成的闭环系统的跟踪响应 $z_i(t), \eta(t) (t \geq t_0 \geq 0)$ 是有界的。更准确地说,对所有 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使

$$|z_i(t_0) - y_R^{(i-1)}(t_0)| < \delta \Rightarrow |z_i(t) - y_R^{(i-1)}(t)| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

$$|\eta(t_0) - \eta_R(t_0)| < \delta \Rightarrow \|\eta(t) - \eta_R(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

证明 见文献[1]第192页或[2]第180页。本书从略。

不限定内部变量有界,相当于去掉假设(2)中的 $\eta_R(t)$ 有界且一致渐近稳定的要求。

为限定内部变量有界,要求满足定理15.1。它的一个替代提法是,要求控制式(15-2)

的选择满足如下的条件:如果 $e(0)=0$,则对所有 t ,有 $e(t)=0$ 。

15.2 渐近跟踪参考模型输出

15.2.1 渐近跟踪参考模型输出问题的定义

给定一参考模型,例如下面的线性模型

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bw \quad (15-10a)$$

$$y_R = C\zeta \quad (15-10b)$$

式中, w 是模型的输入向量, y_R 是参考输出。

定义 15.2 设计一个控制,使系统输出 $y(t)$ 在任意的系统初始条件和参考模型初始条件下,对每个参考模型输入 $w(t)$,都能渐近地收敛到在此 $w(t)$ 作用下的参考模型的输出 $y_R(t)$,此问题被称为渐近跟踪参考模型输出 $y_R(t)$ 问题 (problem of asymptotically tracking the output $y_R(t)$ of a reference model) 或渐近模型匹配问题 (asymptotic model matching problem)。

15.2.2 渐近跟踪参考模型输出问题对参考模型的要求

为实现渐近跟踪,仍考虑用式(15-8)的控制律

$$u = \frac{1}{a(\xi_R + \chi, \eta)} (-b(\xi_R + \chi, \eta) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} e^{(i-1)}) \quad (15-11)$$

其中的 $y_R(t), y_R^{(1)}, \dots, y_R^{(r)}$ 可根据参考模型算得

$$y_R = C\zeta$$

$$Y_R^{(1)} = CA\zeta + CBw$$

...

$$y_R^{(i)} = CA^i \zeta(t) + CA^{i-1} Bw(t) + \dots + CABw^{(i-1)}(t) + CBw^{(i)}(t)$$

可见,所得到的控制律将依赖于 $w(t)$ 的各阶导数。这将要求有一个环节,接收 $w(t)$ 和输出 $w(t)$ 的各阶导数到 $u(t)$,必不可免地会加强噪声,不可行。

为使 $y_R(t), y_R^{(1)}, \dots, y_R^{(r)}$ 与 $w(t)$ 的各阶导数脱离关系,必须对参考模型的相对阶提出要求。现要求模型的相对阶 $r_M \geq r$, r 是系统的相对阶。注意到线性系统的相对阶的定义是

$$CA^k B = 0 \quad k < r_M - 1$$

$$CA^{r_M-1} B \neq 0$$

$r_M \geq r$ 说明模型的 A, B, C 至少要满足

$$CB = CAB = \dots = CA^{r-2} B = 0$$

满足相对阶条件后,再次计算 $y_R(t), y_R^{(1)}, \dots, y_R^{(r)}$,得

$$\begin{aligned}
y_R &= C\zeta \\
y_R^{(1)} &= CA\zeta \\
&\dots \\
y_R^{(r-1)} &= CA^{r-1}\zeta(t) \\
y_R^{(r)} &= CA^r\zeta(t) + CA^{r-1}Bw(t)
\end{aligned} \tag{15-12}$$

结果 $y_R(t), y_R^{(1)}, \dots, y_R^{(r)}$ 与 $w(t)$ 的各阶导数不再发生关系。于是得出结论:为了使控制律不依赖于 $w(t)$ 的各阶导数,不致引入噪声,参考模型的相对阶必须大于或等于系统本身的相对阶。

15.2.3 渐近跟踪参考模型输出问题的系统方程

渐近跟踪参考模型输出问题的系统方程,将在 15.1 节的基础上加以扩充。15.1 节的结果见式(15-9)和式(15-3)。今重写为

$$\dot{\chi} = K\chi \tag{15-13a}$$

$$\dot{\eta} = q(\xi_R + \chi, \eta) \tag{15-13b}$$

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} (L_f^{i-1} h(x) - y_R^{(i-1)})) \tag{15-13c}$$

有待补充和进一步表达的是:(1)补充跟踪参考模型方程式(15-10a);(2)具体表达 ξ_R ; (3)具体表达 $y_R^{(r)}$ 。对(1),见式(15-10a);对(3),见式(15-12);对(2),注意到式(15-12), ξ_R 可具体表示为

$$\xi_R(t) = \begin{bmatrix} y_R(t) \\ y_R^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y_R^{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \zeta = Q_R \zeta \tag{15-14}$$

式中, ζ 是参考模型的状态向量,它在输入 w 作用下的值可通过对式(15-10a)积分求得,结果是

$$\zeta = e^{Az}\zeta(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} Bw(s)ds \tag{15-15}$$

因为 ζ 可通过计算求得,所以 ξ_R 也可以通过计算求得。

据此还可以进一步得到

$$y_R(t) = C\zeta = Ce^{Az}\zeta(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)} Bw(s)ds \tag{15-16}$$

和

$$y(t) = e(t) + y_R(t) = e(t) + Ce^{Az}\zeta(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)} Bw(s)ds \tag{15-17}$$

综合以上各结果,可得表达渐近跟踪参考模型输出问题的系统方程

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bw \tag{15-18a}$$

$$\dot{\chi} = K\chi \tag{15-18b}$$

$$\dot{\eta} = q(Q_R\zeta + \chi, \eta) \tag{15-18c}$$

这里,式(15-18a)是参考模型状态方程,式(15-18b)是系统外部误差状态方程,式(15-

18c)是受 $Q_R\zeta + \chi$ 驱动的系统内部状态方程。

把式(15-12)结果代入式(15-13c)得到渐近跟踪参考模型输出问题的控制律

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{-1} h(x)} (-L_f' h(x) + CA' \zeta(t) + CA'^{-1} B w - \sum_{i=1}^r c_{i-1} (L_f^{i-1} h(x) - CA^{i-1} \zeta)) \tag{15-19}$$

此控制律可以简记为

$$u = \alpha(\zeta, \chi) + \beta(\zeta, \chi) w \tag{15-20}$$

渐近跟踪参考模型输出问题的控制框图见图 15-1。

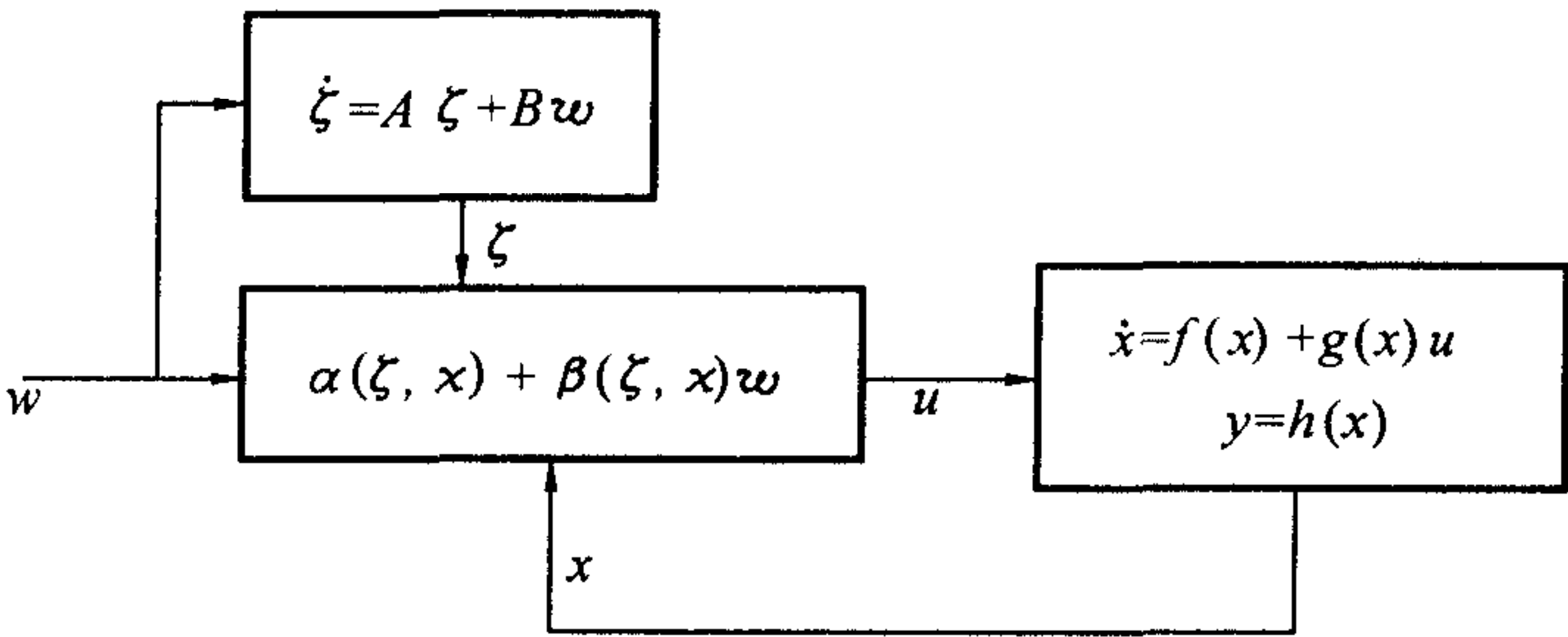


图 15-1 渐近跟踪参考模型输出问题的控制框图

更一般情况下,参考模型是比式(15-10)更一般的非线性模型,可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \gamma(\zeta, x) + \delta(\zeta, x) w \\ y &= \epsilon(\zeta, x) \end{aligned} \tag{15-21}$$

渐近跟踪参考模型输出问题的控制率为

$$u = \alpha(\zeta, \chi) + \beta(\zeta, \chi) w \tag{15-22}$$

合在一起表示为

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\zeta, \chi) + \beta(\zeta, \chi) w \\ \dot{\zeta} &= \gamma(\zeta, x) + \delta(\zeta, x) w \end{aligned} \tag{15-23}$$

相应的框图见图 15-2。

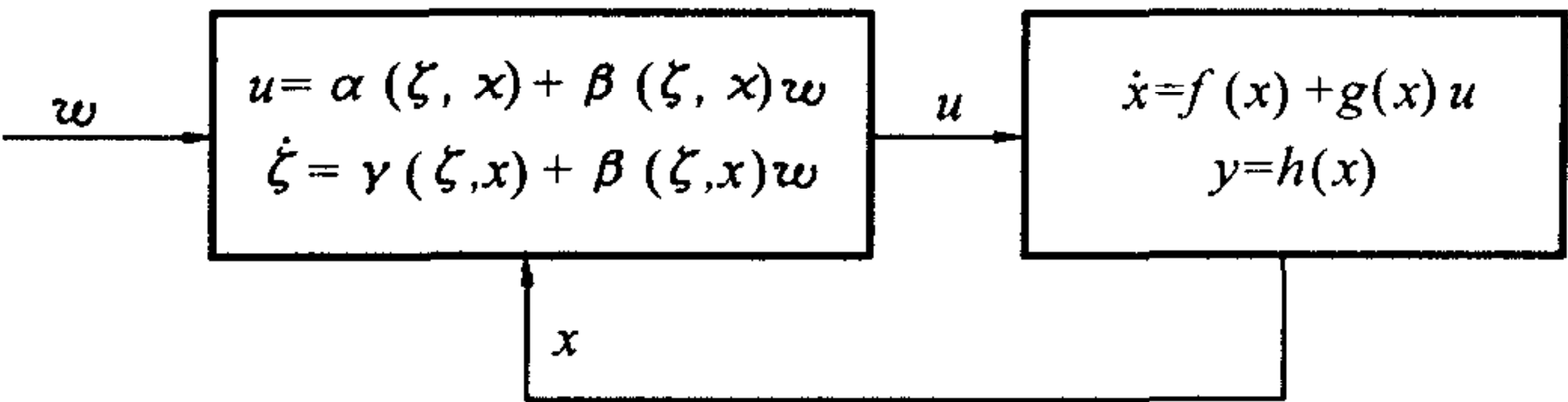


图 15-2 渐近跟踪参考模型输出问题的控制框图

15.2.4 静态状态反馈控制和动态状态反馈控制的定义

定义 15.3 如果时刻 t 施加的反馈控制仅取决于同一瞬时的系统内部状态和外部参考输入,称它为静态(或无记忆)状态反馈控制(static state feedback control)。如果此外还取

决于另外一组状态变量,即有其自身内部状态的另一动力学系统的状态变量,则称它为动态状态反馈控制(dynamic state feedback control)。

借助这一定义,可为渐近跟踪参考模型输出问题作一结论:如果参考模型式(15-10)的相对阶大于或等于系统相对阶,则存在式(15-20)的动态反馈,对每个可能的输入 $w(t)$ 和每个可能的初始状态 $x(0), \zeta(0)$, 使系统输出 $y(t)$ 渐近地收敛到模型输出 $y_R(t)$ 。

第 16 章 扰动解耦问题和前馈控制

本章讨论输出对扰动解耦问题和扰动可度量时的前馈问题。16.1 节给出了输出与扰动解耦问题的定义,给出了扰动解耦的充要条件。16.2 节讨论了做扰动前馈控制时的扰动解耦问题。

16.1 输出与扰动解耦问题

16.1.1 输出与扰动解耦问题定义

定义 16.1 设系统中有非希望的输入或扰动 $w(t)$ 存在,系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (16-1)$$

所谓输出与扰动解耦问题(disturbance decoupling from output problem)就是求证在什么条件下,加静态状态反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

后的闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v + p(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (16-2)$$

的输出 y 能完全独立于扰动 w ,或说与扰动解耦。

16.1.2 扰动解耦要求对扰动 w 的相对阶高于系统相对阶 r

设系统在 x^0 有相对阶 r ,即对 x^0 一邻域所有 x 满足

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \quad 0 \leq k < r-1$$

和对 x^0 满足

$$L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$$

并设有扰动输入作用于此系统。若扰动向量场 $p(x)$ 对 x^0 邻域所有 x 至少满足

$$L_p L_f^i h(x) = 0 \quad 0 \leq i \leq r-1$$

则表明对扰动输入 w 的相对阶已高于 r 。下面将证明这时尽管有扰动 w 存在,但正则形式方程的前 r 个方程将与无扰动时方程形式相同。

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u + p(x)w] \\ &= L_f h(x(t)) + L_g h(x(t))u(t) + L_p h(x(t))w(t) \\ &= L_f h(x(t)) = \phi_2(x(t)) = z_2(t)\end{aligned}$$

同理得

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{dt} &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{dz_{r-1}}{dt} &= z_r(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz_r}{dt} &= \frac{\partial z_r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x} [f(x) + g(x)u + p(x)w] \\ &= L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t))u(t) + L_p L_f^{r-1} h(x(t))w(t) \\ &= L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t))u(t)\end{aligned}$$

令

$$a(z) = L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(z)) \quad b(z) = L_f^r h(\phi^{-1}(z))$$

得

$$\frac{dz_r}{dt} = b(z) + a(z)u(t)$$

以上命题得证。

16.1.3 扰动解耦后系统的正则形式和精确线性化

正则形式方程后 $n-r$ 个方程将与扰动 w 有关。为得到正则形式方程后 $n-r$ 个方程,补选坐标变换函数 $\phi_{r-1}(x), \dots, \phi_n(x)$, 使满足

$$L_g \phi_i(x) = 0 \quad i = r-1, \dots, n$$

则

$$\begin{aligned}\frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t) + p(x(t))w(t)) \\ &= L_f \phi_i(x(t)) + L_g \phi_i(x(t))u(t) + L_p \phi_i(x(t))w(t) \\ &= L_f \phi_i(x(t)) + L_p \phi_i(x(t))w(t) \quad r+1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}q_i(z) &= L_f \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad r+1 \leq i \leq n \\ k_i(z) &= L_p \phi_i(\phi^{-1}(z)) \quad r+1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

得

$$\frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t)) + k_i(z(t))w(t) \quad r+1 \leq i \leq n$$

总的结果是

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \\ y &= z_1\end{aligned}$$

其中

$$q(\xi, \eta) = (q_{r+1}(\xi, \eta) \quad \cdots \quad q_n(\xi, \eta))^T$$

$$k(\xi, \eta) = (k_{r+1}(\xi, \eta) \quad \cdots \quad k_n(\xi, \eta))^T$$

施加线性化反馈

$$u = \frac{-b(\xi, \eta) + v}{a(\xi, \eta)} \quad (16-3)$$

后,上式变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= v \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (16-4)$$

简记为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bv \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (16-5)$$

式中, A, B 是 Brunovsky 标准形

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

系统框图见图 16-1。

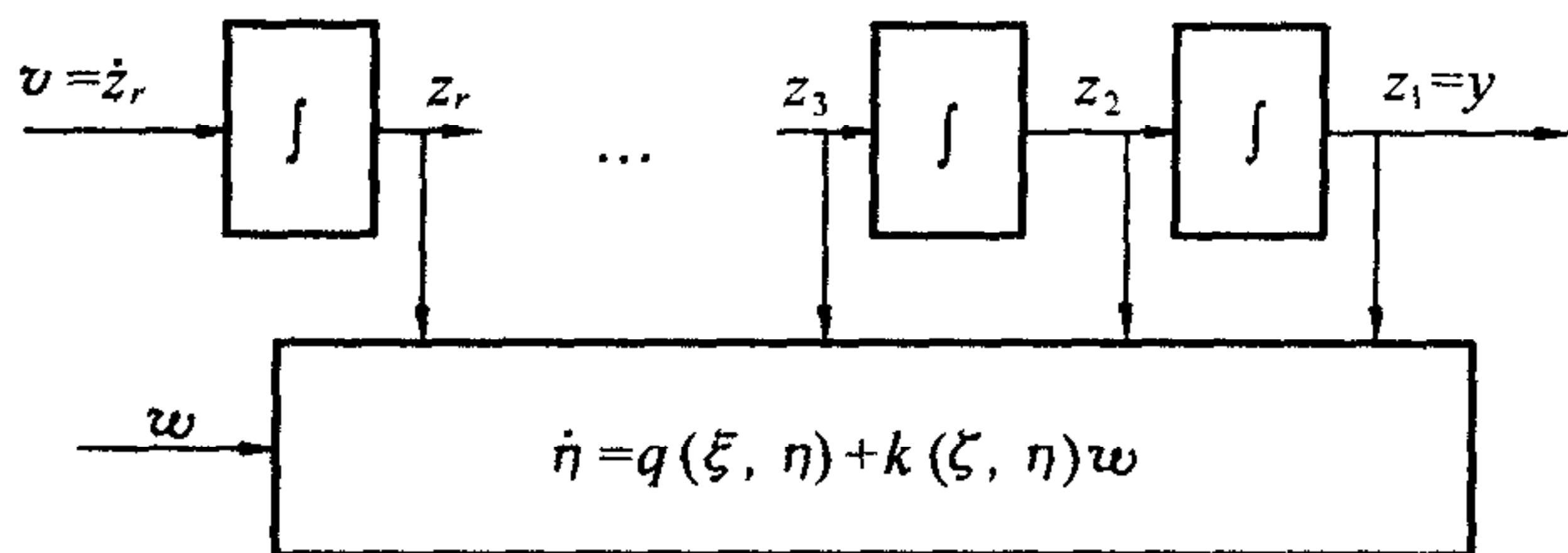


图 16-1 扰动解耦系统结构框图

16.1.4 扰动解耦充要条件

在 16.1.2 节,我们已经找到了系统输出与扰动解耦问题解存在的一个充分条件,并且明确地构造了一个解耦反馈式(16-3)。事实上,不难证明,该条件也是必要的。这些结果可归结为如下的定理。

定理 16.1 设系统在 x_0 有相对阶 r 。能找到局部定义在 x_0 附近的反馈 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$,使系统输出与扰动解耦问题有解的充要条件是

$$L_p L_f^i h(x) = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq r-1 \quad \text{对所有接近 } x_0 \text{ 的 } x \quad (16-6)$$

如果满足此条件,被找的状态反馈控制(问题的解)是

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{v}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (16-7)$$

证明 (充分性)上面已证。(必要性)设已有某个解 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, 使输出与扰动解耦,代入原方程的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v + p(x)w \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

按假设输出必独立于 w , 并且当 $v(t) = 0 \quad \forall t$ 时也如此。即对系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + p(x)w \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

也必输出独立于 w 。计算

$$y^{(1)}(t) = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_{f+g\alpha} h(x(t)) + L_p h(x(t))w(t)$$

因对所有使 $x(t)$ 接近 x^0 的 t , 要做到 $y(t)$ 与 $w(t)$ 无关, 仅当 $L_p h(x) = 0$ 。今设满足此条件, 进一步计算

$$y^{(2)}(t) = \frac{\partial L_{f+g\alpha} h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_{f+g\alpha}^2 h(x(t)) + L_p L_{f+g\alpha} h(x(t))w(t)$$

又得到 $L_p L_{f+g\alpha} h(x(t))$ 必须为零。与此类似, 对 $y(t)$ 的各高阶导数重复同样的过程, 直到最终得到

$$y^{(r)}(t) = L_{f+g\alpha}^r h(x(t)) + L_p L_{f+g\alpha}^{r-1} h(x(t))w(t)$$

并知 $L_p L_{f+g\alpha}^{r-1} h(x)$ 也必须是零。综上得

$$L_p L_{f+g\alpha}^i h(x) = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq r-1 \quad \text{对所有接近 } x_0 \text{ 的 } x$$

注意到式(12-26)的结果, 有

$$L_{f+g\alpha}^k h(x) = L_f^k h(x) \quad 0 \leq k \leq r-1$$

于是我们得到要证明的结论: 输出与扰动解耦问题有解的必要条件是

$$L_p L_f^i h(x) = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq r-1 \quad \text{对所有接近 } x_0 \text{ 的 } x$$

得证。

最后顺便说明, 定理 16.1 的条件式(16-6)在形式上还可以改写为

$$p(x) \in \Omega^\perp(x) \quad \text{对所有 } x_0 \text{ 邻域的 } x \quad (16-8)$$

式中

$$\Omega = \text{span}\{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{r-1} h\}$$

是与扰动向量场 $p(x)$ 正交的全微分对偶分布。根据式(16-6), 即

$$L_p L_f^i h(x) = \langle dL_f^i h, p(x) \rangle = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq r-1 \quad \text{对所有接近 } x_0 \text{ 的 } x$$

式(16-8)成立是显然的。

16.1.5 扰动解耦的精确线性化系统再加外环做渐近稳定控制

在 16.1.3 节, 系统先实现了解耦, 随后实现了反馈精确线性化。在此基础上, 还可以再加上外环, 进一步做渐近稳定控制。为做到这一点, 只要进一步取

$$\begin{aligned} v &= -(c_0 h(x) + \cdots + c_{r+1} L_f^{r-1} h(x)) + \bar{v} \\ &= -(c_0 z_1 + \cdots + c_{r-1} z_r) + \bar{v} \end{aligned}$$

并代入式(16-5),得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + \bar{B}v \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (16-9)$$

式中, A, B 是标准形

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{r-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再设法使系统渐近稳定即可。因为其线性化部分对应的特征多项式是

$$p(s) = c_0 + c_1 s + \cdots + c_{r-1} s^{r-1} + s^r$$

如果解耦控制前原系统的零动态是渐近稳定的,则由定理 14.4,选择系数 c_0, \cdots, c_{r-1} 使 $p(s)$ 的根都在左半平面后,系统将是渐近稳定的。

16.2 扰动可度量时的前馈控制

16.2.1 有扰动前馈控制时的扰动解耦

如果扰动 w 是可度量的,随时知道 w 的值,则有可能把 w 纳入控制 u 中,实现扰动前馈控制。有前馈的控制取

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)w \quad (16-10)$$

代入式(16-1)得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v + [g(x)\gamma(x) + p(x)]w \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

现考虑有扰动前馈控制时的扰动解耦问题。把此式与式(16-2)对比,不同的是 $p(x)w$ 改变为 $[g(x)\gamma(x) + p(x)]w$ 。因此,上节定理 16.1 的扰动解耦充要条件,原要求满足式(16-8),现应相应改为

$$g(x)\gamma(x) + p(x) \in \Omega^\perp(x) \quad \text{对 } x_0 \text{ 邻域所有 } x \quad (16-11)$$

这等价于要求

$$0 = L_{g\gamma+p} L_f^i h(x) = L_g L_f^i h(x) \gamma(x) + L_p L_f^i h(x) \quad 0 \leq i \leq r-1 \quad (16-12)$$

也就是要求

$$\begin{aligned} L_p L_f^i h(x) &= 0 \quad 0 \leq i < r-1 \\ L_p L_f^{r-1} h(x) &= -L_g L_f^{r-1} h(x) \gamma(x) \end{aligned}$$

为满足此二式,一方面应选择前馈函数

$$\gamma(x) = -\frac{L_p L_f^{r-1} h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (16-13)$$

另一方面应有

$$L_p L_f^i h(x) = 0, \quad 0 \leq i < r-1 \quad (16-14)$$

为落实前者,把式(16-13)代入式(16-10),注意 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 采用式(16-7)的值,得有扰动前馈控制时的扰动解耦控制律

$$u = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{v}{L_g L_f^{r-1} h(x)} - \frac{L_p L_f^{r-1} h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} w \quad (16-15)$$

为满足后者,考虑到 $p(x)$ 一般不能选择,因此只能通过选择 $h(x)$ 达到。

最后,对有扰动前馈和无扰动前馈两种情况进行比较,得到的结果是,除控制律有所不同外,有扰动前馈要求的条件式(16-14)弱于无前馈时的条件式(16-6)。有扰动前馈不要求 $L_p L_f^{r-1} h(x) = 0$ 的条件。

第 17 章 用高增益输出反馈实现局部渐近稳定

本章讨论只通过输出反馈实现非线性系统局部渐近稳定问题。17.1 节和 17.2 节分别就相对阶为 1 和相对阶较大两种情况进行讨论。本章讨论的基本假设是系统的零动态方程的线性近似是渐近稳定的。这一假设的要求比假设零动态方程本身渐近稳定要高。

17.1 相对阶为 1 情况下的输出反馈

17.1.1 非线性系统通过输出反馈 $u = -Ky$ 实现局部渐近稳定

定理 17.1 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{17-1}$$

不失一般性,假设 $f(0) = h(0) = 0$ 。假设系统在点 $x = 0$ 的相对阶是 1。还假设系统的零动态方程的线性近似是渐近稳定的,即矩阵

$$Q = \left[\frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_{(\xi, \eta) = (0, 0)}$$

的特征值都有负实部。如采用静态(无记忆)线性反馈 $u = -Ky$ 构成闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ u &= -Kh(x)\end{aligned}\tag{17-2}$$

并取 K 的符号等于 $L_g h(0)$ 的符号,则存在一正数 K_0 ,对所有满足 $|K| > K_0$ 的 K ,可使系统式(17-2)在平衡点 $x = 0$ 渐近稳定。

证明本书从略,请参见文献[1]第 202~204 页或文献[2]第 190~191 页。

例 17.1 (通过输出反馈 $u = -Ky$ 实现渐近稳定)设计渐近稳定的线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= Cx = [15 \quad 8 \quad 1]x\end{aligned}$$

系统对应的传递函数为

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 - s^2 - 10s - 8} \\ &= \frac{(s+3)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s-4)}\end{aligned}$$

首先,求系统的相对阶。因

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = CB = 1 \neq 0 \quad \text{在全状态空间相对阶 } r=1$$

其次,选坐标变换函数

$$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = Cx$$

选

$$z_2 = \phi_2(x) = x_1$$

$$z_3 = \phi_3(x) = x_2$$

再次,求坐标变换后的正则形式。计算

$$b(z) = L_f h(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \big|_{x=\phi^{-1}(z)} = CA\phi^{-1}(z)$$

$$= [8 \quad 25 \quad 9] \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_1 - 15z_2 - 8z_3 \end{bmatrix} = 9z_1 - 127z_2 - 47z_3$$

$$a(z) = L_g h(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) \big|_{x=\phi^{-1}(z)} = CB = 1$$

$$q_2(z) = L_f \phi_2(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} f(x) \big|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0] A \phi^{-1}(z) = [0 \quad 1 \quad 0] \phi^{-1}(z) = z_3$$

$$q_3(z) = L_f \phi_3(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} f(x) \big|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$= [0 \quad 1 \quad 0] A \phi^{-1}(z) = [0 \quad 0 \quad 1] \phi^{-1}(z) = z_1 - 15z_2 - 8z_3$$

代入,得正则形式方程

$$\dot{z}_1 = b(z) + a(z)u = 9z_1 - 127z_2 - 47z_3 + u$$

$$\dot{z}_2 = q_2(z) = z_3$$

$$\dot{z}_3 = q_3(z) = z_1 - 15z_2 - 8z_3$$

$$y = z_1$$

写成矩阵形式为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 9 & -127 & -47 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -15 & -8 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = z_1$$

其零动态特性为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Q 的特征值是 -3 和 -5 , 均具有负实部。

再其次,因满足定理 17.1 各条件,选择适当的 K ,采用静态线性反馈 $u = -Ky$ 构成闭环系统,必可使系统达到渐近稳定。闭环系统为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 9 & -127 & -47 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -15 & -8 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = z_1$$

$$u = -Ky$$

最后,选择 K 。把 u, y 代入后的闭环系统方程为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 9-K & -127 & -47 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -15 & -8 \end{bmatrix} z$$

可求得其特征方程为

$$\lambda^3 + (K-1)\lambda^2 + (8K-10)\lambda + 15K-8=0$$

当 K 足够大时,所有特征值都在左半平面,系统渐近稳定。

17.2 相对阶较大情况下的输出反馈

17.2.1 非线性系统通过动态线性输出反馈实现局部渐近稳定

定理 17.2 设系统式(17-1)在 $x=0$ 的相对阶为 r ,其零动态特性的一阶近似在 $x=0$ 渐近稳定。设采用传递函数为

$$H(s) = -\frac{Kn(s)}{(1+Ts)^{r-1}}$$

的线性输出反馈回路(如图 17-1),并设多项式 $n(s) = s^{r-1} + c_{r-2}s^{r-2} + \cdots + c_1s + c_0$ 的根都有负实部, K 是一个适当大的常数,其符号与 $L_g L_f^{r-1}h(0)$ 相同, T 是一个足够小的正常数,则该反馈控制使系统在 $x=0$ 渐近稳定。

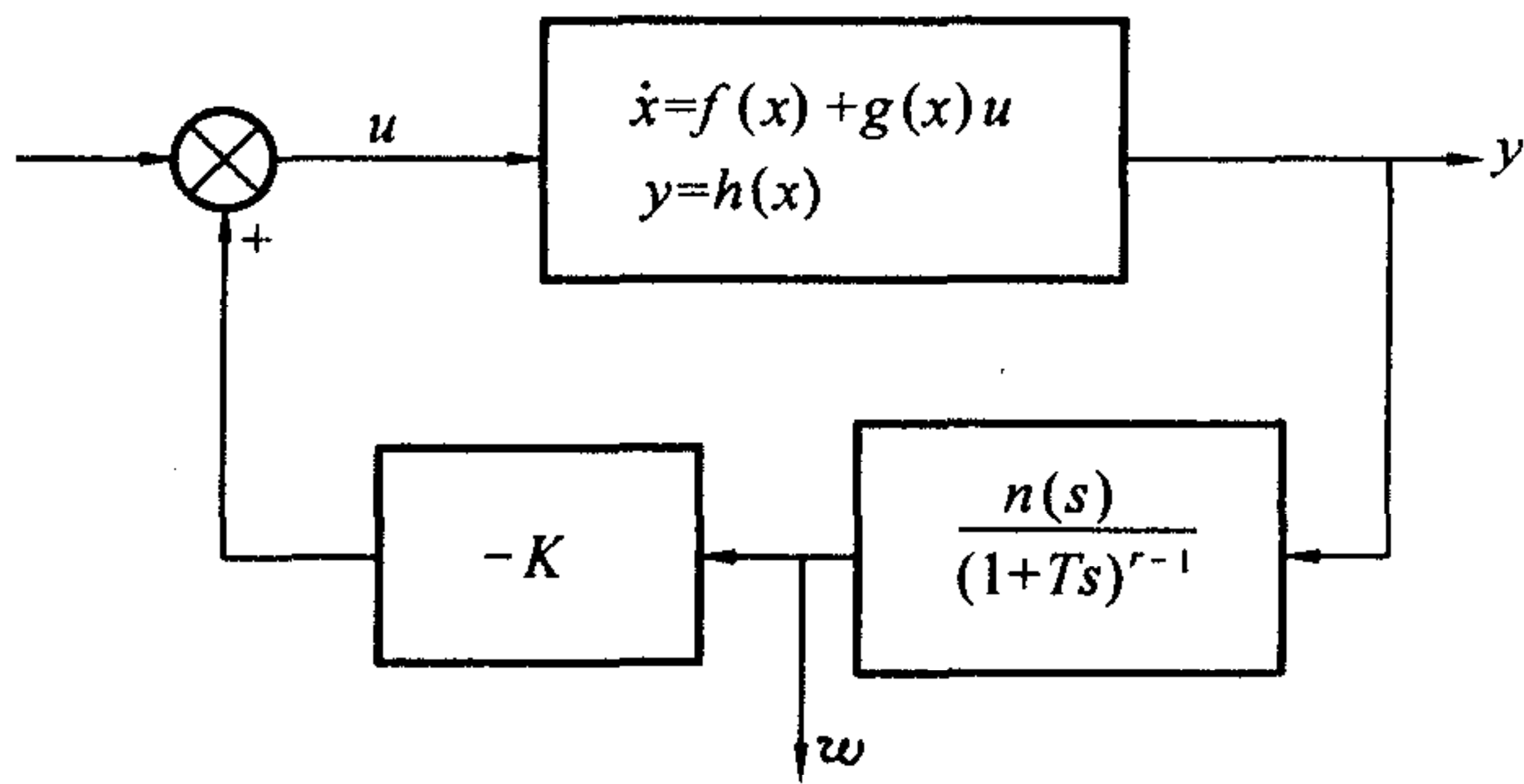


图 17-1 动态线性输出反馈实现渐近稳定

证明 定理证明可分为以下几步。第一步,由原系统的 $f(x), g(x), h(x)$ 构成一个相对阶为 1 的假系统。现构造一个假输出为 $w = k(x)$ 的系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{17-4}$$

$$w = k(x) = L_f^{r-1}h(x) + c_{r-2}L_f^{r-2}h(x) + \cdots + c_1L_f h(x) + c_0h(x)$$

式中, $c_0, c_1, \cdots, c_{r-2}$ 是实数; r 是原系统的相对阶。如原系统 $f(0) = h(0) = 0$, 则假系统有 $k(0) = 0$ 。计算假系统在 $x=0$ 点的相对阶。对 $k=0$, 得到

$$\begin{aligned} L_g h(x)|_{x=0} &= L_g (L_f^{-1} h(x) + c_{r-2} L_f^{-2} h(x) + \cdots + c_1 L_f h(x) + c_0 h(x))|_{x=0} \\ &= L_g L_f^{-1} h(x)|_{x=0} \neq 0 \end{aligned}$$

故假想系统在 $x=0$ 的相对阶为 1。第二步,求假系统的零动态特性。为得到假系统的零动态特性,把假系统变为正则形式

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ w &= z_r + c_{r-2}z_{r-1} + \cdots + c_1z_2 + c_0z_1 \end{aligned}$$

得到正则形式之后,求零动态方程。强使 $w=0$ 得到

$$z_r = -(c_{r-2}z_{r-1} + \cdots + c_1z_2 + c_0z_1)$$

显然,这与通常强使 $y=0$ 导致的 $\xi=0$ 不同。把它代入假系统的正则形式得到一个 $n-1$ 维的零动态系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= -(c_{r-2}z_{r-1} + \cdots + c_1z_2 + c_0z_1) \\ \dot{\eta} &= q(z_1, \cdots, z_{r-1}, -(c_{r-2}z_{r-1} + \cdots + c_1z_2 + c_0z_1), \eta) \end{aligned}$$

能保证输出 $w=0$ 的控制 u 由式 $\dot{z}_r = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u$ 得到。第三步,考察假系统的 $n-1$ 维零动态系统的线性近似的渐近稳定性。其前 $r-1$ 行已经是线性的,为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-2} \\ \dot{z}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{r-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{r-2} \\ z_{r-1} \end{bmatrix}$$

对应的特征多项式是

$$n(s) = s^{r-1} + c_{r-2}s^{r-2} + \cdots + c_1s + c_0$$

据此我们可得到关于稳定性的结论:如果原系统零动态方程的线性近似是渐近稳定的,即

$$Q = \left. \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta) = (0, 0)}$$

的特征值都具有负实部,并且 $n(s)$ 的根都有负实部,则 $n-1$ 维零动态系统对 $(z_1, \cdots, z_{r-1}, \eta)$ 的 Jacobi 阵的特征值都有负实部,从而假系统的 $n-1$ 维零动态系统的线性近似是渐近稳定的。第四步,证明假设系统通过反馈 $u = -Kw$ 达到渐近稳定。因为假系统已经满足定理 17.1 的条件,根据该定理,采用无记忆反馈

$$u = -Kw = -K(L_f^{-1}h(x) + c_{r-2}L_f^{-2}h(x) + \cdots + c_1L_f h(x) + c_0h(x)) \quad (17-5)$$

K 与 $L_g k(0) = L_g L_f^{-1} h(0)$ 同号,必可使假系统在 $x=0$ 渐近稳定。第五步,把式(17-5)右

端以原系统的输出 y 表达。因为

$$y = h(x)$$

$$y^{(1)} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h(x) + L_g h(x)u = L_f h(x)$$

\vdots

$$y^{(r-1)} = \frac{\partial L_f^{r-2} h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f^{r-2} h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f^{r-1} h(x) + L_g L_f^{r-2} h(x) = L_f^{r-1} h(x)$$

于是式(17-5)可写为

$$u = -Kw = -Kk(x) = -K(y^{(r-1)}(t) + c_{r-2}y^{(r-2)} + \cdots + c_1y^{(1)}(t) + c_0y(t)) \quad (17-6)$$

此式对应的拉氏变换式为

$$u(s) = -Kn(s)y(s)$$

式中

$$n(s) = s^{r-1} + c_{r-2}s^{r-2} + \cdots + c_1s + c_0$$

第六步,也是最后一步,是证明在反馈控制环中引入一个小的时间常数不损害渐近稳定性。此步得证,则定理 17.2 得证。对第 6 步,有以下定理。

定理 17.3 假设闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) - g(x)k(x)K \quad (17-7)$$

的一次近似,在 $x=0$ 是渐近稳定的,则对足够小的正数 T ,系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - g(x)\zeta \\ \dot{\zeta} &= \frac{1}{T}(-u + k(x)K) \end{aligned} \quad (17-8)$$

的一次近似在 $(x, \zeta) = (0, 0)$ 也是渐近稳定的。

证明本书从略,请参见文献[1]第 206~207 页或文献[2]第 193 页。

式(17-8)与式(17-7)的差异是引入了一个足够小的正数 T 。当 $T=0$ 时,两式将取得一致。式(17-8)的系统相当于在式(17-7)系统的反馈回路上增加了一个小惯性环节。如图 17-2 所示。

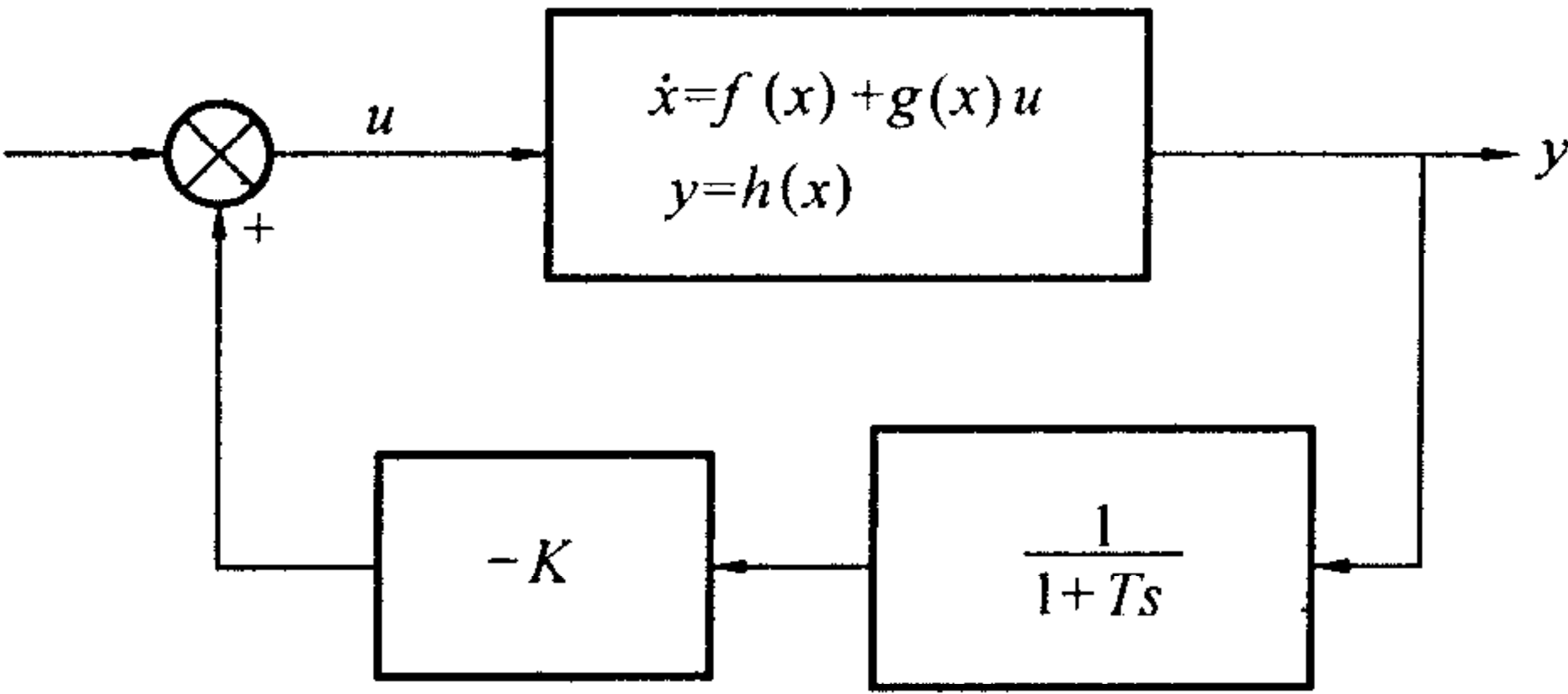


图 17-2 定理 17.3 附图

此定理表明,在稳定控制回路中引入一个小时间常数不损害其渐近稳定性(至少在局部)。此定理可以多次重复应用。例如,定理 17.2 相当于重复使用了 $r-1$ 次。

第 18 章 非线性系统全维状态观测器

本章讨论非线性系统全维状态观测问题,18.1 节定义了观测器线性化问题,给出了观测器线性化问题可解的充要条件和观测器的构造过程。

18.1 观测器线性化问题

18.1.1 系统假设

为简洁,让我们考虑如下的无输入单输出系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{18-1}$$

并假设经某一坐标变换 $z = \phi(x)$ 后,系统可表示为

$$\dot{z} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = Az + k(Cz)\tag{18-2a}$$

$$y = h(\phi^{-1}(z)) = Cz\tag{18-2b}$$

式中, k 是一个有实自变量的 n 维向量值函数; (A, C) 是一全状态能观对。式(18-2a)右端是一个关于状态 z 的线性展开式,其非线性部分可表为输出 y 的函数。式(18-2b)中,输出与状态间有线性关系。

18.1.2 系统式(18-2)的全状态观测器

在图 18-1 中,上半部是系统式(18-2),下半部是状态观测器。 ξ 是观测器观测到的状态变量

$$\dot{\xi} \approx A\xi + k(Cz)$$

为修正其误差,构成闭环系统,引进修正项 $G(C\xi - y)$,其中 $C\xi$ 是复制系统输出, y 是原系统输出, G 是动态增益列向量。于是得观测器动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + k(y) + G(C\xi - y) \\ &= (A + GC)\xi - Gy + k(y)\end{aligned}\tag{18-3}$$

在 z 坐标下的观测误差为

$$e = \xi - z$$

把系统方程式(18-2a)改写为

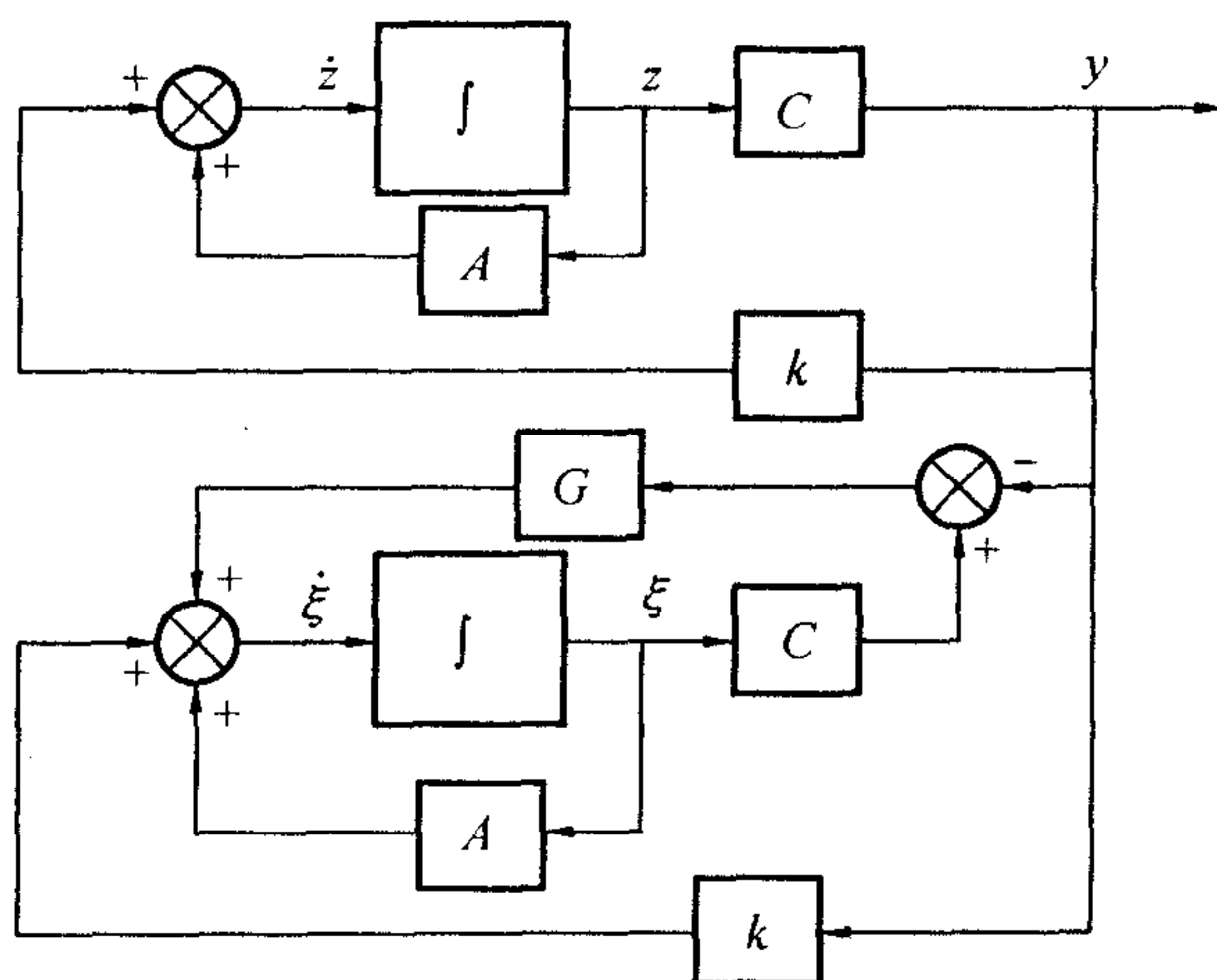


图 18-1 状态观测器

$$\dot{z} = Az + k(Cz) = (A + GC)z - Gy + k(y) \quad (18-4)$$

式(18-3)减式(18-4)得误差动态方程

$$\dot{e} = (A + GC)e \quad (18-5)$$

这是一个线性方程,其特征值可通过选择 G 进行配置。分析上面的误差动态方程推导过程使我们认识到,误差动态方程之所以是线性方程主要依赖于有 18.1.1 节的系统假设。因此,使系统方程取式(18-2)的形式,就成为使观测器误差动态方程得以线性化的基本保证条件。下面的观测器线性化问题就是据此定义的。

18.1.3 观测器线性化问题定义

定义 18.1 给定无输入系统式(18-1)和点 x_0 , (如果可能)找 x_0 的一个邻域 U^0 和定义在 U^0 的一个坐标变换 $z = \phi(x)$, 并找一个映射 $k: h(U^0) \rightarrow R^n$, 要做到对所有 $z \in \phi(U^0)$ 和满足全状态能观性条件

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = n$$

的适当矩阵 A 和行向量 C , 构成系统方程式(18-2)的右端, 即

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = Az + k(Cz) \quad (18-6a)$$

$$h(\phi^{-1}(z)) = Cz \quad (18-6b)$$

此称观测器线性化问题(observer linearization problem)。

18.1.4 观测器线性化问题可解的充要条件

引理 18.1 观测器线性化问题可解的一个必要条件是

$$\dim(\text{span}\{dh(x^0), dL_f h(x^0), dL_f^2 h(x^0), \dots, dL_f^{n-1} h(x^0)\}) = n \quad (18-7)$$

证明 首先, 证明在 (A, C) 满足全状态能观性假设条件下, 式(18-2)中 (A, C) 取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (18-8)$$

具有一般性。事实上, 因为一个全状态能观的线性系统, 总可以找到变换阵 T , 经变换 TAT^{-1} , 化为能观标准型

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad CT^{-1} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

通过选择列向量 G , 总可使

$$TGCT^{-1} = TG \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & G_1 \\ 0 & \cdots & 0 & G_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

从而有

$$T(A + GC)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad CT^{-1} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (18-9)$$

如把原坐标变换 $z = \phi(x)$ 替换为

$$\tilde{z} = \tilde{\phi}(x) = T\phi(x) = Tz \quad (18-10a)$$

把原来的向量函数 $k(y)$ 代换为

$$\tilde{k}(y) = T(k(y) - Gy) \quad (18-10b)$$

则式(18-2b)右端将对应于

$$y = h(\phi^{-1}(z)) = Cz = CT^{-1}Tz = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\tilde{z}$$

即

$$y = h(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{z})) = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\tilde{z} \quad (18-11a)$$

式(18-2a)右端将对应于

$$\begin{aligned} \tilde{z} = \tilde{f}(z) &= \left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = T(Az + k(Cz)) = T(Az + T^{-1}\tilde{k}(Cz) + GCz) \\ &= T(Az + GCz) + \tilde{k}(Cz) = T(A + GC)T^{-1}Tz + \tilde{k}(CTT^{-1}z) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{z} + \tilde{k}([0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\tilde{z}) \end{aligned} \quad (18-11b)$$

对比式(18-11)和式(18-2),可见,一般的 (A, C) 都可通过变换式(18-10a)和式(18-10b)变换为式(18-8)的形式。因此,这证明了 (A, C) 取式(18-8)的形式具有一般性。

其次,求 $L_f^i h(x)$, $0 \leq i \leq n-1$ 。设 (A, C) 取式(18-8)的形式,设变换为

$$z = \phi(x) = \text{col}(z_1(x), \cdots, z_n(x))$$

如果式(18-2)对所有 $x \in U^0$ 成立,我们有

$$h(x) = Cz = z_n(x)$$

注意到式(18-2a)的最后一行

$$\frac{\partial z_n}{\partial x^T} f(x) = z_{n-1}(x) + k_n(z_n(x))$$

可求得

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} f(x) = \frac{\partial z_n}{\partial x^T} f(x) = z_{n-1}(x) + k_n(z_n(x))$$

式中, k_n 表示 k 的第 n 个分量。注意到式(18-2a)的第 $n-1$ 行

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x^T} f(x) = z_{n-2}(x) + k_{n-1}(z_n(x))$$

可再求得

$$\begin{aligned} L_f^2 h(x) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x^T} f(x) = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x^T} f(x) + \left[\frac{\partial k_n}{\partial y} \right]_{y=z_n} \frac{\partial z_n}{\partial x^T} f(x) \\ &= z_{n-2}(x) + k_{n-1}(z_n(x)) + \left[\frac{\partial k_n}{\partial y} \right]_{y=z_n} \frac{\partial z_n}{\partial x^T} f(x) \\ &= z_{n-2}(x) + k_{n-1}(z_n(x)) + \left[\frac{\partial k_n}{\partial y} \right]_{y=z_n} (z_{n-1}(x) + k_n(z_n(x))) \\ &= z_{n-2}(x) + \tilde{k}_{n-1}(z_n(x), z_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

式中

$$\tilde{k}_{n-1}(z_n, z_{n-1}) = \frac{\partial k_n}{\partial z_n} z_{n-1} + \frac{\partial k_n}{\partial z_n} k_n(z_n) + k_{n-1}(z_n)$$

类似地,注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial x^T} f(x) &= z_{i-1}(x) + k_i(z_n(x)) \\ \frac{\partial z_2}{\partial x^T} f(x) &= z_1(x) + k_2(z_n(x)) \\ \frac{\partial z_1}{\partial x^T} f(x) &= k_1(z_n(x)) \end{aligned}$$

对每个 $L_f^i h(x), 1 \leq i \leq n-1$ 可求得

$$L_f^i h(x) = z_{n-i}(x) + \tilde{k}_{n-i+1}(z_n(x), \dots, z_{n-i+1}(x))$$

最后,求 $dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h$, 即

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x^T} \\ \frac{\partial L_f h}{\partial x^T} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial x^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial z^T} \\ \frac{\partial L_f h}{\partial z^T} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial z^T} \end{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x^T}$$

因为右端矩阵非奇异,所以式(18-7)成立,从而引理得证。

引理 18.2 如果满足引理 18.1 所指出的必要条件,即

$$\dim(\text{span}\{dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{n-1} h(x^0)\}) = n$$

则可在 x^0 的邻域 U^0 找到唯一的向量场 τ , 对所有 $x \in U^0$ 满足条件

$$L_\tau h(x) = L_\tau L_f h(x) = \cdots = L_\tau L_f^{n-2} h(x) = 0$$

$$L_\tau L_f^{n-1} h(x) = 1 \quad (18-12)$$

证明 把式(18-12)改写成方程组

$$\begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-2} h(x) \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \tau(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18-13)$$

因为系数矩阵满秩,所以方程有唯一解。证毕。

引理 18.3 观测器线性化问题可解的充要条件是

(1) $\dim(\text{span}\{dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{n-1} h(x^0)\}) = n$;

(2) 存在从 R^n 某开集 V 到 x^0 一邻域 U^0 的一个映射 F , 对所有 $z \in V$, F 满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial z^T} = [\tau(x) \quad -ad_f \tau(x) \quad \cdots \quad (-1)^{n-1} ad_f^{n-1} \tau(x)]_{x=F(z)} \quad (18-14)$$

式中, τ 是式(18-13)的唯一的向量场解。

证明 (必要性) 引理 18.1 已经证明条件(1)是必要的, 这里只证明条件(2)的必要性。设对所有 $z \in U^0$, 存在 $F(z) = \phi^{-1}(z)$, 满足式(18-2)。为下面证明方便, 记

$$\theta(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1} \right)_{z=F^{-1}(x)} \quad (18-15)$$

首先, 证明下式对所有 $0 \leq k \leq n-1$ 成立。

$$ad_f^k \theta(x) = (-1)^k \left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)} \quad (18-16)$$

注意到式(18-15), 则对 $k=0$, 式(18-16)自然成立。在证明在其它 k 值下, 式(18-16)成立之前, 要确立一个事实。这是在引理 18.1 证明过程中已经证明过的。在引理 18.1 的证明过程中已得知, 如果式(18-2)成立, 并记变换为

$$\tilde{f}(z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)}$$

相应地有

$$f(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \tilde{f}(z) \right)_{z=F^{-1}(x)} \quad (18-17)$$

则必有关系

$$\tilde{f}(z) = \begin{bmatrix} k_1(z_n) \\ z_1 + k_2(z_n) \\ \vdots \\ z_{n-1} + k_n(z_n) \end{bmatrix}$$

在确认上述事实之后, 让我们开始证明在其它 k 值下, 式(18-16)成立。用 e_i 表示 $n \times n$ 单位阵的第 i 列。对 $k=1$, 注意把式(18-17)代入, 并提出公因子 $\frac{\partial F}{\partial z^T}$, 并把李括号展开, 得

$$\begin{aligned} ad_f \theta(x) &= [f(x), \theta(x)] = \left[f(x), \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} e_1 \right)_{z=F^{-1}(x)} \right] \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} [\tilde{f}(z), e_1] \right)_{z=F^{-1}(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} \left(-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z^T} e_1 \right) \right)_{z=F^{-1}(x)} = \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} \left(-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_1} \right) \right)_{z=F^{-1}(x)} \\
&= - \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} e_2 \right)_{z=F^{-1}(x)} = - \left(\frac{\partial F}{\partial z_2} \right)_{z=F^{-1}(x)}
\end{aligned}$$

对一般的 $k = k, 1 \leq k \leq n-1$ 可类似地证得

$$\begin{aligned}
\text{ad}_f^k \theta(x) &= [f(x), \text{ad}_f^{k-1} \theta(x)] = \left[f(x), (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} e_k \right)_{z=F^{-1}(x)} \right] \\
&= (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} [\tilde{f}(z), e_k] \right)_{z=F^{-1}(x)} \\
&= (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} \left(1 - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z^T} e_k \right) \right)_{z=F^{-1}(x)} = (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} \right) \right)_{z=F^{-1}(x)} \\
&= (-1)^k \left(\frac{\partial F}{\partial z^T} e_{k+1} \right)_{z=F^{-1}(x)} = (-1)^k \left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)}
\end{aligned}$$

至此,式(18-16)得证。把式(18-16)改写为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)} = (-1)^k \text{ad}_f^k \theta(x)$$

并把各 $\partial F / \partial z_i$ 综合到一起,得

$$\frac{\partial F}{\partial z^T} = [\theta(x) \quad -\text{ad}_f \theta(x) \quad \cdots \quad (-1)^{n-1} \text{ad}_f^{n-1} \theta(x)]_{x=F(z)}$$

此式与式(18-14)形式上接近。

其次,证明 θ 与式(18-13)的唯一解 τ 一致。因为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)} = (-1)^k \text{ad}_f^k \theta(x)$$

左乘 $\partial h / \partial x$, 得

$$\frac{\partial h}{\partial x^T} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)} = (-1)^k \frac{\partial h}{\partial x^T} \text{ad}_f^k \theta(x) = (-1)^k L_{\text{ad}_f^k \theta} h(x)$$

注意到

$$h(x) = h(\phi^{-1}(z)) = h(F(z)) = z_n$$

另一方面有

$$\frac{\partial h}{\partial x^T} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)} = \frac{\partial h(F(z))}{\partial z_{k+1}} \Big|_{z=F^{-1}(x)} = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq n-2 \\ 1 & k = n-1 \end{cases}$$

联合到一起,得到

$$\begin{aligned}
L_{\text{ad}_f^k \theta} h(x) &= 0 \quad 0 \leq k \leq n-2 \\
(-1)^{n-1} L_{\text{ad}_f^{n-1} \theta} h(x) &= 1
\end{aligned}$$

由引理 11.1 的式(11-3a)和式(11-3b)以及式(11-8b),这等价于

$$\begin{aligned}
L_\theta L_f^k h(x) &= 0 \quad 0 \leq k \leq n-2 \\
L_\theta L_f^{n-1} h(x) &= 1
\end{aligned}$$

第二式彼此间的等价性可证明如下:在式(11-8b)中,选择参数 $r = n, i = n-1, j = 0$ 可得

$$(-1)^{n-1} L_{\text{ad}_f^{n-1} \theta} h(x) = (-1)^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ad}_f^{n-1} \theta$$

$$= (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} L_{\theta} L_f^{n-1} h(x) = L_{\theta} L_f^{n-1} h(x) = 1$$

结果与式(18-12)完全相同,故 θ 与 τ 一致得证。必要性证毕。

(充分性)已知条件(1)、(2)成立,求证式(18-2a)和式(18-2b)成立。首先,根据条件(1)和(2),确定坐标变换。因条件(1)成立,由引理 18.3,可由式(18-13)求得唯一解 τ 。由引理 11.2 证明过程中的式(11-9)知,对所有 x^0 近处的 x ,以下乘积所得矩阵的秩为 n

$$\begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} [\tau(x) \quad \text{ad}_f \tau(x) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-1} \tau(x)]$$

因此知,对所有 x^0 近处的 x ,向量场 $\tau(x), \text{ad}_f \tau(x), \dots, \text{ad}_f^{n-1} \tau(x)$ 是线性独立的,也就是说,式(18-14)的右端是线性独立的。因条件(2)成立,偏微分方程式(18-14)的解 F 存在。设 z^0 是满足 $F(z^0) = x^0$ 的一点。因为式(18-14)右端各分量线性独立,所以 $\partial F / \partial z$ 在 z^0 的秩必为 n ,即 F 是 z^0 一邻域到 x^0 一邻域的一个微分同胚。 $\phi = F^{-1}$ 就是要找的坐标变换。变换后的 $f(x)$ 为

$$\tilde{f}(z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} \quad (18-18)$$

其次,证明式(18-2a)成立,即证明

$$\tilde{f}(z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = Az + k(Cz) \quad (18-19)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + k([0 \cdots 0]z)$$

让我们重新注意条件(2),由式(18-14)知对 $0 \leq k \leq n-1$,有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)} = (-1)^k \text{ad}_f^k \tau(x)$$

或改写为

$$\text{ad}_f^k \tau(x) = (-1)^k \left(\frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} \right)_{z=F^{-1}(x)}$$

两端都变换为 z 坐标,对 $0 \leq k \leq n-1$,有

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \text{ad}_f^k \tau(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = (-1)^k \frac{\partial z}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial z_{k+1}} = (-1)^k \frac{\partial z}{\partial z_{k+1}} = (-1)^k e_{k+1} \quad (18-20)$$

另一方面,把李括号展开,随后把 $\partial \phi / \partial x$ 放入括号得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \text{ad}_f^k \tau(x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} [f, \text{ad}_f^{k-1} \tau](x) \right)_{x=\phi^{-1}(z)} = [\tilde{f}(z), (-1)^{k-1} e_k] \\ &= (-1)^k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z^T} e_k = (-1)^k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} \end{aligned}$$

考虑到 z_0 无定义,此式对 $1 \leq k \leq n-1$ 成立。两结果对比得

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} = e_{k+1}$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial \tilde{f}_{k+1}}{\partial z_k} = 1 \quad \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial z_k} = 0 \quad i \neq k+1$$

因为 $1 \leq k \leq n-1$, 不包括 $k=n$, 故 \tilde{f} 各分量一般与 z_n 有关。以上结果证明了式(18-19)成立, 从而式(18-2a)成立。最后, 证明式(18-2b)成立, 即证明 $y = h(F(z)) = Cz = z_n$ 。因为满足条件(1), 所以由引理 18.2 知式

$$L_\tau h(x) = L_\tau L_f h(x) = \cdots = L_\tau L_f^{n-2} h(x) = 0$$

$$L_\tau L_f^{n-1} h(x) = 1$$

成立。由引理 11.1 的式(11-3a)和式(11-3b)以及式(11-8)知, 这等价于

$$L_{\text{ad}_f^k \tau} h(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq n-2$$

$$(-1)^{n-1} L_{\text{ad}_f^{n-1} \tau} h(x) = 1$$

由此得

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x^T} \text{ad}_f^k \tau(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq n-2$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x^T} \text{ad}_f^{n-1} \tau(x) = (-1)^{n-1}$$

变换为 z 坐标

$$\frac{\partial h(F(z))}{\partial z^T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \text{ad}_f^k \tau(x) \right)_{x=F(z)} = \frac{\partial h(F(z))}{\partial z^T} (-1)^k e_{k+1} = \frac{\partial h(F(z))}{\partial z_{k+1}} (-1)^k = 0$$

$$\frac{\partial h(F(z))}{\partial z^T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^T} \text{ad}_f^{n-1} \tau(x) \right)_{x=F(z)} = \frac{\partial h(F(z))}{\partial z^T} (-1)^{n-1} e_n$$

$$= \frac{\partial h(F(z))}{\partial z_n} (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

于是得

$$\frac{\partial h(F(z))}{\partial z_{k+1}} = 0 \quad 0 \leq k \leq n-2$$

$$\frac{\partial h(F(z))}{\partial z_n} = 1$$

从而式(18-2b)得证。定理 18.3 证毕。

关于引理 18.3 中的式(18-14)的可解性有下面的定理。

定理 18.4 对偏微分方程组

$$\frac{\partial x}{\partial z_i} = \tau_i(x(z)) \quad 1 \leq i \leq n \quad (18-21)$$

式中, τ_1, \cdots, τ_n 是 n 维向量场; x 是定义在 x^0 邻域的一个坐标映射。假设在 x_0 点向量场 $\tau_1(x^0), \cdots, \tau_n(x^0)$ 是线性独立的, 则存在 x^0 邻域 U^0 和 z^0 邻域 V^0 , 并且存在满足 $x(z^0) = x^0$ 的微分同胚 $x: V^0 \rightarrow U^0$ 是方程的解, 当且仅当

$$[\tau_i, \tau_j] = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (18-22)$$

证明 本定理可用 Frobenius 定理来证明。证明过程本书从略, 请参见参考文献[1]第 224~225 页或[2]第 209~210 页。

合并定理 18.3 和定理 18.4 可得到下面的定理。

定理 18.5 观测器线性化问题是可解的, 当且仅当

$$(1) \dim(\text{span}\{dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{n-1} h(x^0)\}) = n \quad (18-23a)$$

(2) 式(18-13)的唯一的解向量场 τ 满足

$$[\text{ad}_f^i \tau, \text{ad}_f^j \tau] = 0 \quad 0 \leq i, j \leq n-1 \quad (18-23b)$$

证明 定理 18.3 的式(18-14)可改写为

$$\frac{\partial F}{\partial z_{i+1}} = [(-1)^i \text{ad}_f^i \tau(x)]_{x=F(z)} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_{j+1}} = [(-1)^j \text{ad}_f^j \tau(x)]_{x=F(z)} \quad 0 \leq j \leq n-1$$

因定理 8.4 的条件被满足, 式(18-22)成立, 在这里得

$$[\text{ad}_f^i \tau(x), \text{ad}_f^j \tau(x)] = 0 \quad 0 \leq i, j \leq n-1$$

证毕。

定理 18.6 观测器线性化问题是可解的, 当且仅当

$$(1) \dim(\text{span}\{dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{n-1} h(x^0)\}) = n \quad (18-24a)$$

(2) 式(18-13)的唯一的解向量场 τ 满足

$$[\tau, \text{ad}_f^k \tau] = 0 \quad k = 1, 3, \dots, 2n-3 \quad k > 0 \quad (18-24b)$$

证明 只需证明式(18-23)和式(18-24)间的充要关系。式(18-23b)展开后为

$$[\tau, \text{ad}_f \tau] = 0, [\tau, \text{ad}_f^2 \tau] = 0, \dots, [\tau, \text{ad}_f^{n-1} \tau] = 0$$

$$[\text{ad}_f \tau, \text{ad}_f^2 \tau] = 0, \dots, [\text{ad}_f \tau, \text{ad}_f^{n-1} \tau] = 0$$

⋮

$$[\text{ad}_f^{n-2} \tau, \text{ad}_f^{n-1} \tau] = 0$$

式(18-23)展开后为

$$[\tau, \text{ad}_f \tau] = 0, [\tau, \text{ad}_f^3 \tau] = 0, \dots, [\tau, \text{ad}_f^{2n-3} \tau] = 0$$

用数学归纳法, 并反复使用李括号性质中的 Jacobi 恒等式可证得结果。

18.1.5 观测器的构造过程

设计一个观测器, 要求其误差动态方程是线性的, 且误差动态方程的特征值是可指定的。下面介绍其设计步骤。

(1) 如果定理 18.5 的式(18-23a)成立, 则由式(18-13)解得 $\tau(x)$ 。

(2) 如果定理 18.5 的式(18-23b)也成立, 则解偏微分方程式(18-14), 得 $F(z)$, 它定义在 z^0 的邻域 V^0 , 满足 $F(z^0) = x^0$ 。

(3) 取坐标变换 $\phi = F^{-1}$ 。

(4) 计算映射 k , 得

$$k(Cz) = k([0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]z) = \dot{z} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} z$$

即

$$k(z_n) = \begin{bmatrix} k_1(z_n) \\ k_2(z_n) \\ \vdots \\ k_n(z_n) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} - \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$

(5)最后得到观测器

$$\dot{\xi} = (A + GC)\xi - Gy + k(y)$$

式中, A, C 如式(18-8)。

例 18.1 (全维线性状态观测器)为以下系统设计线性观测器

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

(1)检查充要条件式(18-23a),有

$$dh(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} = [1 \quad 0]$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} f(x) = x_1 + x_2 \quad dL_f h(x) = [1 \quad 1]$$

$$\dim(\text{span}\{dh(x^0) \quad dL_f h(x^0)\}) = \dim(\text{span}\{[1 \quad 0], [1 \quad 1]\}) = 2$$

可见满足充要条件式(18-23a)。解式(18-13),即

$$\begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \end{bmatrix} \tau(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tau(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得

$$\tau(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2)检查充要条件式(18-23b),有

$$\text{ad}_f \tau(x) = \frac{\partial \tau}{\partial x^T} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x^T} \tau(x) = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau(x) & \text{ad}_f \tau(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial \text{ad}_f \tau}{\partial x^T} \tau(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可见满足充要条件式(18-23b)。可着手解偏微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial z^T} = \begin{bmatrix} \tau(x) & -\text{ad}_f \tau(x) \end{bmatrix}_{x=F(z)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix}_{x=F(z)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & F_1 \end{bmatrix}$$

得解

$$F_1 = z_2 \quad F_2 = z_1 + \frac{1}{2} z_2^2$$

且

$$F(0) = x^0 = 0$$

(3)取坐标变换 $\phi = F^{-1}$,有

$$x_1 = z_2 \quad z_1 = -\frac{1}{2} x_1^2 + x_2$$

$$x_2 = z_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad z_2 = x_1$$

即

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_1^2 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

(4) 计算映射 k

$$k(z_2) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} - \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

计算

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} &= \left[\begin{bmatrix} -x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= \begin{bmatrix} -x_1^2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} -z_2^2 \\ z_2 + z_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入上式得

$$k(z_2) = \begin{bmatrix} -z_2^2 \\ z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 \end{bmatrix}$$

(5) 最后得到观测器

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A + GC)\xi - Gy + k(y) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \xi - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -y^2 \\ y + \frac{1}{2}y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} -c_1 y - y^2 \\ -c_2 y + y + \frac{1}{2}y^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

第 19 章 单入单出非线性系统 精确线性化举例

本章给出三个单入单出非线性控制系统实例。19.1 节以直流电机传动控制为例说明精确线性化实现过程,同时这也是一个零输出问题用例。19.2 节以单杆件机械手为例,说明精确线性化过程,同时还是一个用常值反馈成功地移动原系统平衡点的例子。19.3 节提供了一个单机无穷大电力系统励磁控制的应用实例,见参考文献[23]。该例采用的精确线性化方法和步骤与参考文献[5],[6]有所不同,但所得结果与参考文献[5],[6]完全相同。

19.1 直流电机传动控制

19.1.1 系统方程

它励直流电动机(见图 19-1)励磁(定子)回路方程为

$$I_s \frac{dI_s}{dt} + R_s I_s = V_s$$

电枢(转子)回路方程为

$$L_r \frac{dI_r}{dt} + R_r I_r + E = V_r$$

力矩平衡方程为

$$J \frac{d\omega}{dt} + F\omega = T$$

式中, F 是粘滞摩擦系数。三方程通过下列关系相互耦合

$$E = k_e \phi \omega$$

$$T = k_m \phi I_r$$

$$\phi = L_s I_s$$

式中, ϕ 是励磁绕组磁链。在满足能量平衡关系 $E I_r = T \omega$ 的情况下,可得到 $k_e = k_m = k$ 。选状态变量 $x = (I_s \quad I_r \quad \omega)^T$,选励磁电压作为控制量,即 $u = V_s$ 后,系统方程可写为

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{19-1}$$

式中

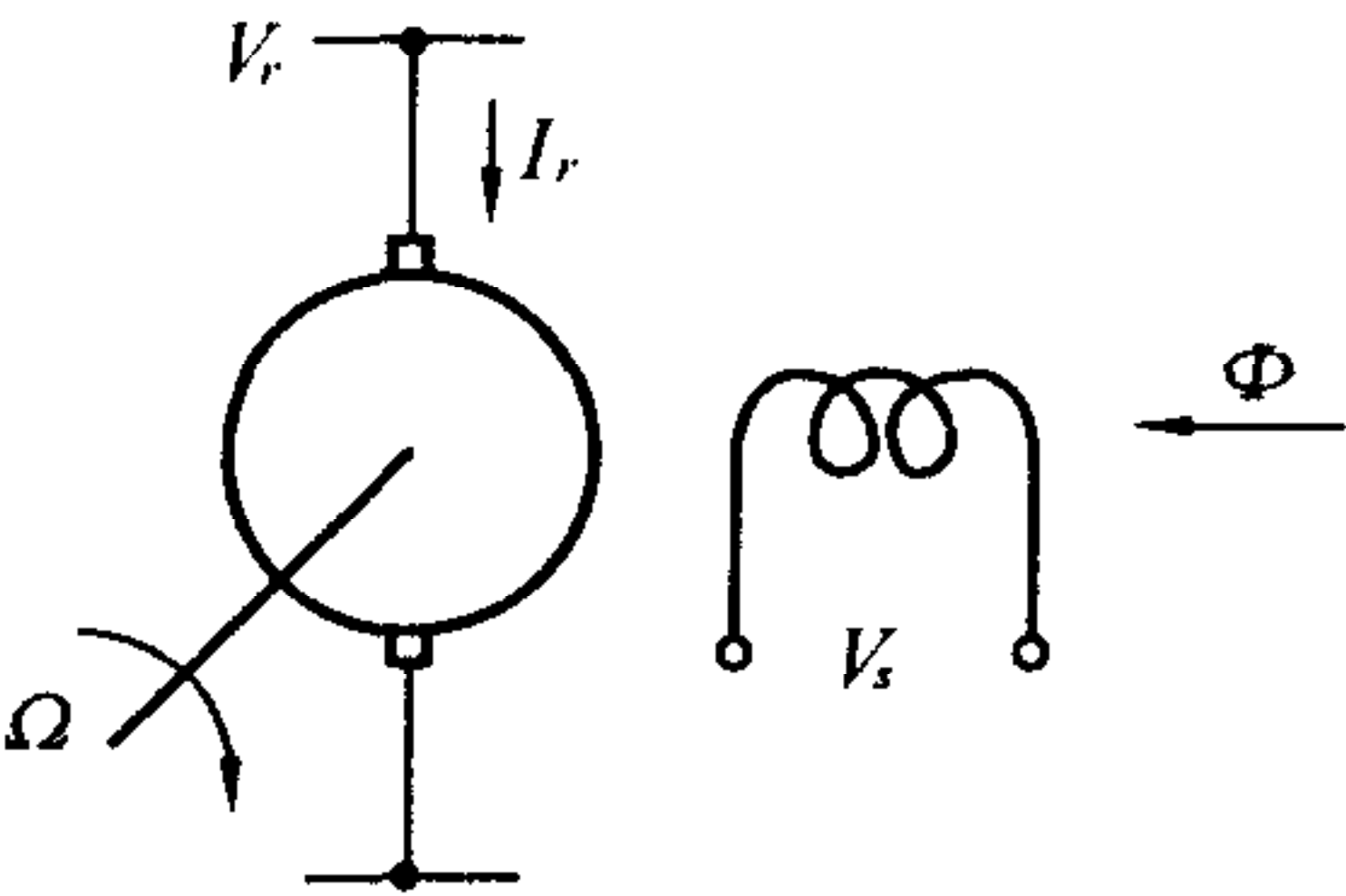


图 19-1 直流电机控制

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s}x_1 \\ -\frac{R_r}{L_r}x_2 + \frac{V_r}{L_r} - \frac{kL_s}{L_r}x_1x_3 \\ -\frac{F}{J}x_3 + \frac{kL_s}{J}x_1x_2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

19.1.2 坐标变换和反馈线性化

按定理 12.6 的充要条件式(12-36b), 由

$$[f, g](x) = -\frac{\partial f}{\partial x}g(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{1}{L_s} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_s^2} \\ \frac{k}{L_r}x_3 \\ -\frac{k}{J}x_2 \end{bmatrix}$$

$$[g, [f, g]](x) = \frac{\partial [f, g]}{\partial x_1}\frac{1}{L_s} = 0$$

可见, 分布 $D = \text{span}\{g, [f, g]\}$ 在集合 $U = \{x \in R^3: x_2 \neq 0 \text{ 或 } x_3 \neq 0\}$ 上为 2 维, 非奇异, 对合。 U 是 R^3 上的稠集。 D 在 $x^0 \in U$ 点邻域满足式(12-36b)。按定理 12.6 的充要条件式(12-36a), 补充计算 $[f, [f, g]](x)$ 后可知, 对 U 的子集中 U^0 的所有 x^0 , 满足式(12-36a), 即

$$\text{rank}\{[g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \text{ad}_f^2 g(x^0)]\} = 3$$

从而全部满足了状态反馈精确线性化的充要条件。

下面寻找 $\lambda(x)$ 。根据式(12-34a), $\lambda(x)$ 应满足

$$L_g\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}g(x) = 0 \quad L_{\text{ad}_f g}\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\text{ad}_f g(x) = 0$$

综合在一起, 得

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}[g(x) \quad \text{ad}_f g(x)] = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & \frac{R_s}{L_s^2} \\ 0 & \frac{k}{L_r}x_3 \\ 0 & -\frac{k}{J}x_2 \end{bmatrix} = [0, 0]$$

此偏微分方程有解 $\lambda(x) = L_r x_2^2 + J x_3^2$ 。得到了 $\lambda(x)$ 之后, 可着手求线性化坐标和线性化反馈。线性化坐标是 $\phi(x) = \text{col}(\lambda(x), L_f\lambda(x), L_f^2\lambda(x))$, 其中

$$L_f\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}f(x) = [0 \quad 2L_r x_2 \quad 2J x_3]f(x) = -2R_r x_2^2 + 2V_r x_2 - 2F x_3^2$$

$$L_f^2\lambda(x) = \frac{\partial L_f\lambda}{\partial x}f(x) = [0 \quad -4R_r x_2 + 2V_r \quad -4F x_3]f(x)$$

$$= (-4R_r x_2 + 2V_r) \left(-\frac{R_r}{L_r}x_2 + \frac{V_r}{L_r} - \frac{kL_s}{L_r}x_1x_3 \right) - 4F x_3 \left(-\frac{F}{J}x_3 + \frac{kL_s}{J}x_1x_2 \right)$$

线性化反馈是

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

式中

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^3 \lambda(x)}{L_g L_f^2 \lambda(x)} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2 \lambda(x)}$$

19.1.3 取轴角速度偏差做输出时的零动态特性

选择电枢电压一定,通过调整励磁电压保持转速一定的控制方式。在选择实现方案时,可考虑选取输出函数为

$$y = h(x) = \omega - \omega^0 = x_3 - \omega^0 \quad (19-2)$$

并作为零输出问题来求解的控制方案。采用零输出控制,可指望产生恒等于 ω^0 的角速度。不过,这时将不得不放弃上面已求得的,能使系统相对阶 $r = n$ 的理想输出函数 $\lambda(x) = L_r x_2^2 + J x_3^2$ 。显然,这将使相对阶 $r < n$ 。

首先,求与 $y = h(x) = x_3 - \omega^0$ 相对应的相对阶。对于 $k = 0$,有 $L_g h(x) = 0$;对于 $k = 1$,有

$$L_f h(x) = -\frac{F}{J} x_3 + \frac{kL_s}{J} x_1 x_2 \quad L_g L_f h(x) = -\frac{k}{J} x_2$$

结果得在 $x_2 \neq 0$ 的每一点,相对阶 $r = 2$ 。其次,求线性化坐标

$$z_1 = h(x) = x_3 - \omega_0 \quad (19-3a)$$

$$z_2 = L_f h(x) = -\frac{F}{J} x_3 + \frac{kL_s}{J} x_1 x_2 \quad (19-3b)$$

选 z_3 满足 $L_g \phi_3(x) = 0$,结果取

$$z_3 = x_2 \quad (19-3c)$$

注意到

$$\begin{aligned} L^2 h(x) &= \left(\frac{kL_s}{J} x_2 \quad \frac{kL_s}{J} x_1 \quad \frac{F}{J} \right) f(x) \\ &= -\frac{kR_s}{J} x_1 x_2 + \frac{kL_s}{J} x_1 \left(-\frac{R_r}{L_r} x_2 + \frac{V_r}{L_r} - \frac{kL_s}{L_r} x_1 x_3 \right) - \frac{F}{J} \left(-\frac{F}{J} x_3 + \frac{kL_s}{J} x_1 x_2 \right) \end{aligned}$$

变换后得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= L^2 h(x) + L_g L_f h(x) u \\ \dot{z}_3 &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \dot{x} = f_2(x) = -\frac{R_r}{L_r} x_2 + \frac{V_r}{L_r} - \frac{kL_s}{L_r} x_1 x_3 \end{aligned} \quad (19-4)$$

零输出时要求的控制为

$$u^*(x) = \frac{-L^2 h(x)}{L_g L_f h(x)} \quad (19-5)$$

初始值必须在零空间中选择。零输出时的状态空间(零空间)是

$$z^* = \{z \in R^3 : z_1 = z_2 = 0\} \quad (19-6a)$$

用 x 坐标表示为

$$z^* = \{x \in R^3 : h(x) = L_f h(x) = 0\} \quad (19-6b)$$

即

$$z^* = \left\{ x \in R^3 : x_3 = \omega^0, x_1 x_2 = \frac{F\omega^0}{kL_s} \right\} \quad (19-6c)$$

这表明本例中的零动态空间为 1 维 (见图 19-2)。把约束

$$x_3 = \omega^0, \quad x_1 = \frac{F\omega^0}{kL_s x_2} \quad (19-7)$$

代入式(19-4)第三式,得到以 x 坐标表示的零动态方程

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_r}{L_r}x_2 - \frac{F\omega_0^2}{L_r x_2} + \frac{V_r}{L_r} \quad (19-8)$$

可看到 $x_2 = 0$ 是一个奇异值。

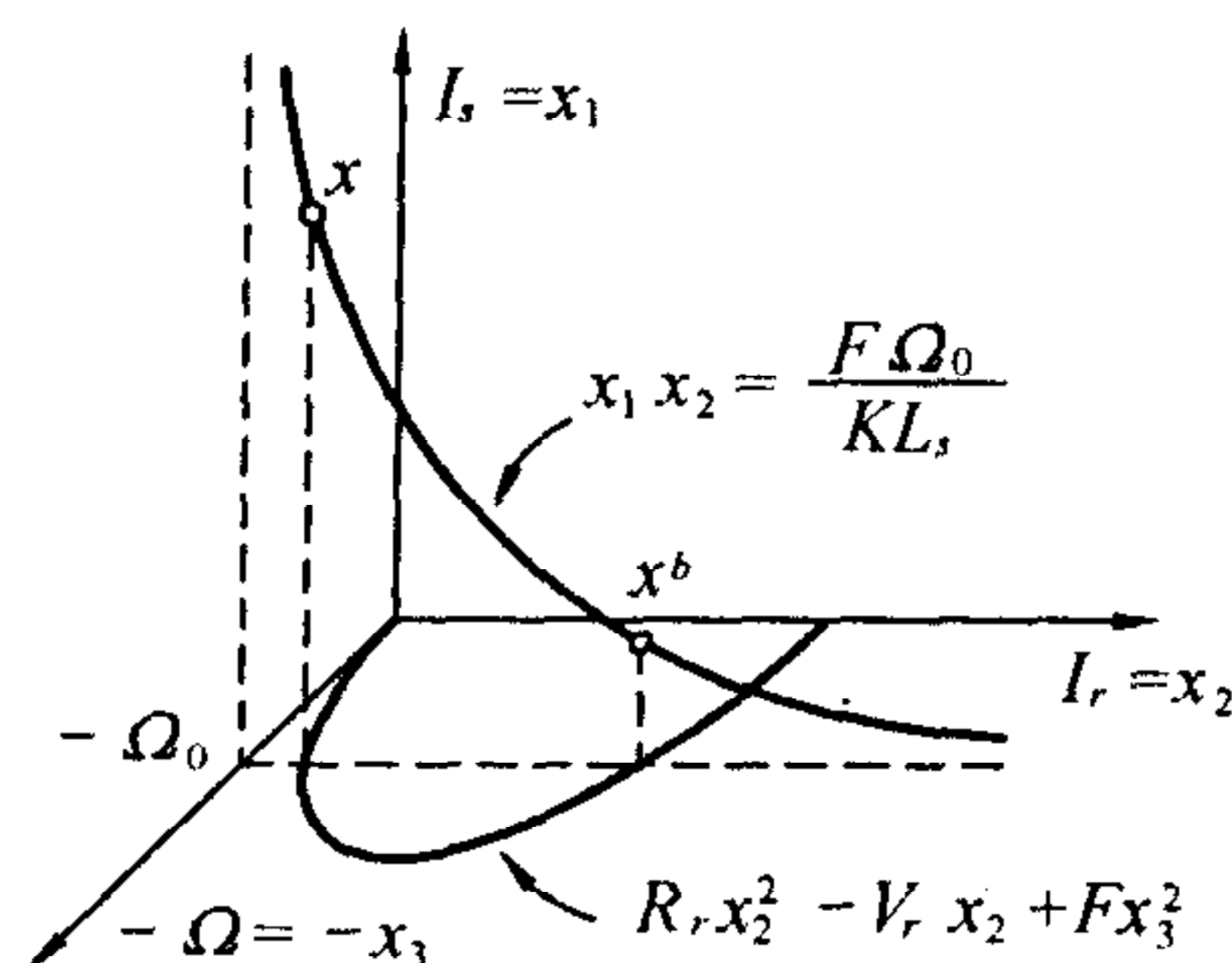


图 19-2 直流电机传动例的零动态空间

19.1.4 取轴角速度偏差做输出时的平衡点

为求平衡点,令式(19-8)右端为零,并设 $x_2 > 0$,得

$$R_r x_2^2 - V_r x_2 + (\omega^0)^2 F = 0 \quad (19-9)$$

这是 (x_2, x_3) 平面上的一个椭圆。当给定 ω^0 时,得到两个平衡点。在

$$V_r^2 \geq 4(\omega^0)^2 R_r F \quad (19-10)$$

时,有两个实根。也就是说,给定 ω^0 时,对应的稳态电枢电流有两个可能值

$$x_2^a = \frac{V_r - \sqrt{V_r^2 - 4(\omega^0)^2 R_r F}}{2R_r}, \quad x_2^b = \frac{V_r + \sqrt{V_r^2 - 4(\omega^0)^2 R_r F}}{2R_r} \quad (19-11)$$

ω^0 值的选择必须满足式(19-10)。因为 $0 < x_2 < x_2^a$ 时,零动态方程式(19-8)的右端为正; $x_2^a < x_2 < x_2^b$ 和 $x_2^b < x_2 < \infty$ 时,零动态方程式(19-8)的右端为负,所以 x^b 是一个渐进稳定平衡点, x^a 是一个不稳定平衡点。

19.2 单杆件机械手

19.2.1 系统方程

讨论单杆件机械手,该杆件由电动机经减速箱驱动,并且假设减速箱驱动轴与该杆件间以弹性轴连接,杆件作绕轴旋转运动(见图 19-3)。

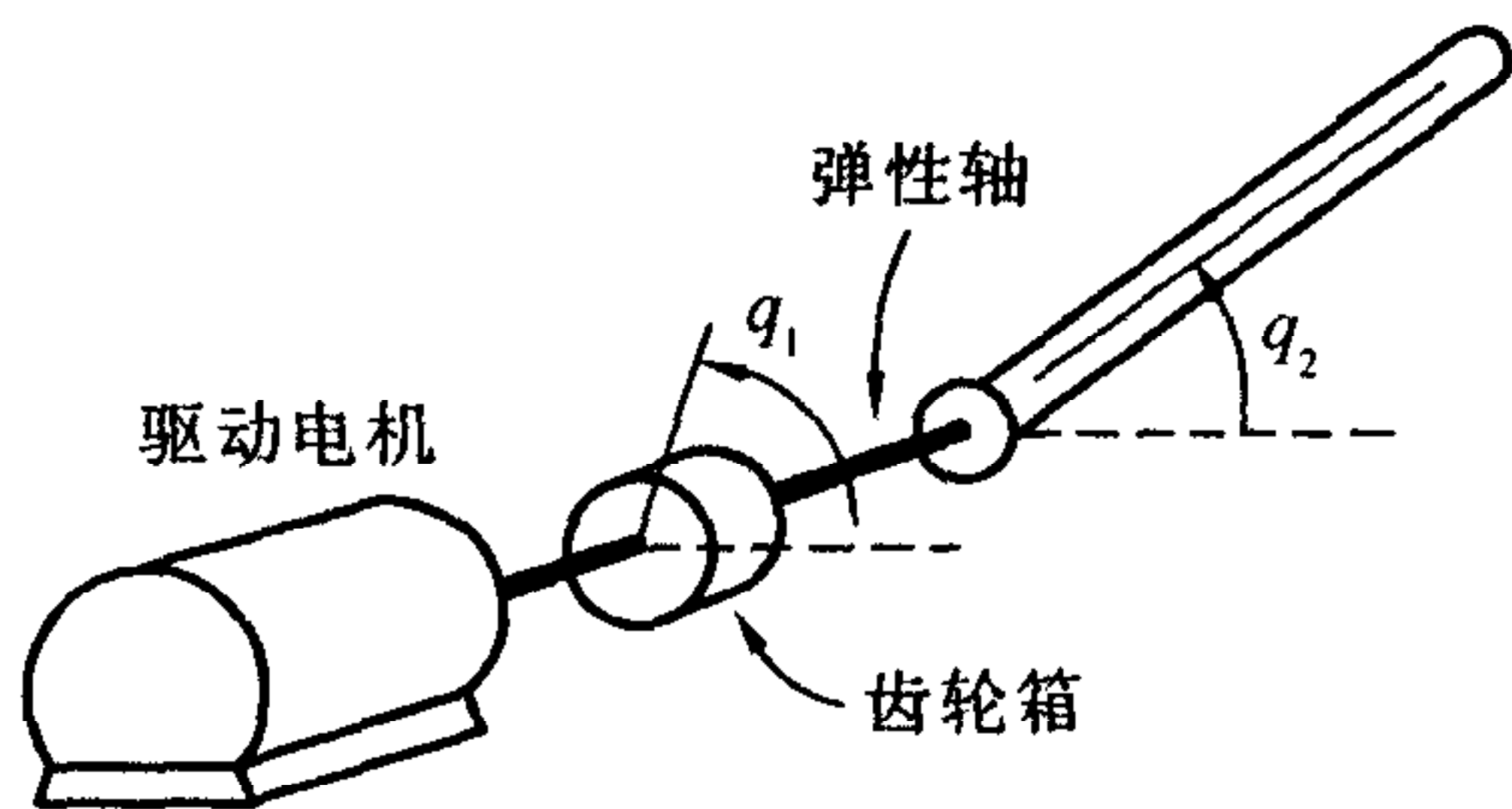


图 19-3 单杆件机械手

设杆件转轴中心至杆件重心的距离为 d ,杆件质量为 m 。杆件与水平位置间的转角为 q_2 ,与 q_2 对应的减速器输入轴转角为 q_1 ,输出轴转角为 q_1/N ,这里 N 为减速器传动比。弹性轴两端相对扭角的大小为 $q_2 - q_1/N$,扭矩为 $K(q_2 - q_1/N)$, K 为弹性轴扭转弹性系数。设电动机和减速器前轴系的转动惯量为 J_1 ,黏摩擦系数为 F_1 ,电

动机驱动转矩为 T , 减速器输出轴所受扭矩为 $K(q_2 - q_1/N)$, 则电动机驱动轴力矩平衡方程为

$$J_1 \ddot{q}_1 + F_1 \dot{q}_1 + \frac{K}{N} \left(q_2 - \frac{q_1}{N} \right) + T = 0 \quad (19-12)$$

设减速器输出轴系转动惯量为 J_2 , 转动黏摩擦系数为 F_2 。减速器输出轴力矩平衡方程为

$$J_2 \ddot{q}_2 + F_2 \dot{q}_2 + K \left(q_2 - \frac{q_1}{N} \right) + mgd \cos q_2 = 0 \quad (19-13)$$

综合二式写出系统方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) = q_2 \end{aligned} \quad (19-14)$$

式中

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ f(x) &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{K}{J_1 N^2} x_1 + \frac{K}{J_1 N} x_2 - \frac{F_1}{J_1} x_3 \\ \frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 \end{bmatrix} \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ u &= T \end{aligned}$$

19.2.2 系统的相对阶

计算系统式(19-14)的相对阶。对于 $k=0$, 有 $L_g h(x) = 0$; 对于 $k=1$, 有

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = x_4 \quad L_g L_f h(x) = 0$$

对于 $k=2$, 有

$$\begin{aligned} L_f^2 h(x) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} f(x) = \frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 \\ L_g L_f^2 h(x) &= 0 \end{aligned}$$

对于 $k=3$, 有

$$\begin{aligned} L_f^3 h(x) &= \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} f(x) \\ &= \frac{K}{J_2 N} x_3 + \left(-\frac{K}{J_2} + \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \right) x_4 - \frac{F_2}{J_2} \left(\frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 \right) \end{aligned}$$

$$L_g L_f^3 h(x) = \frac{K}{J_1 J_2 N} \neq 0$$

结果得相对阶 $r = n = 4$ 。

19.2.3 系统的反馈线性化和坐标变换

线性化反馈

$$u = \frac{-L_f^4 h(x) + v}{L_g L_f^3 h(x)} \quad (19-15)$$

线性化坐标

$$z_1 = h(x) = q_2 = h(x) = x_2$$

$$z_2 = L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = f_2(x) = x_4 \quad (19-16)$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f(x) = f_4(x) = \frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4$$

$$\begin{aligned} z_4 = L_f^3 h(x) &= \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} f(x) = \left[\frac{K}{J_2 N} \quad \frac{K}{J_2} - \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \quad 0 \quad -\frac{F_2}{J_2} \right] f(x) \\ &= \frac{K}{J_2 N} x_3 + \left(\frac{K}{J_2} - \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \right) x_4 - \frac{F_2}{J_2} \left(\frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 \right) \end{aligned}$$

变换后得系统方程

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

(19-17)

$$\dot{z}_4 = L_f^4 h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^3 h(\phi^{-1}(z)) u = v$$

19.2.4 原系统和精确线性化后系统的平衡点

19.2.4.1 原系统的平衡点

原系统式(19-14)的平衡点可根据 $f(x) = 0$ 求得,为

$$x^e = \left[\frac{lN\pi}{2} \quad \frac{l\pi}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad l = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (19-18)$$

对应的像点为

$$z^* = \left[\frac{l\pi}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

19.2.4.2 精确线性化后系统的平衡点

注意到 A 是 Brunovsky 标准形和 A 不满秩,变换后系统的平衡点根据 $Az = 0$ 求得,为

$$z^e = (z_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

满足 $Az = 0$ 的 z^e 的原像点 x^* ,可由式(19-16)和 $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ 的条件求得,其过程为

$$z_2 = L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \frac{\partial x_2}{\partial x} f(x) = f_2(x) = x_4 = 0$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f(x) = \frac{\partial x_4}{\partial x} f(x) = f_4(x)$$

$$= \frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
z_4 &= L^3 f^h(x) = \frac{\partial L^2 f^h}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{K}{J_2 N} & -\frac{K}{J_2} + \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 & 0 & -\frac{F_2}{J_2} \end{pmatrix} f(x) \\
&= \frac{K}{J_2 N} f_1(x) + \frac{-K + mgd \sin x_2}{J_2} f_2(x) - \frac{F_2}{J_2} f_4(x) \\
&= \frac{K}{J_2 N} x_3 + \frac{-K + mgd \sin x_2}{J_2} x_4 - \frac{F_2}{J_2} f_4(x) = 0
\end{aligned}$$

结果得

$$x^* = \begin{bmatrix} Nx_2 + \frac{mgdN}{K} \cos x_2 & x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

在 $\cos x_2 = 0$ 情况下的解是

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{lN\pi}{2} & \frac{l\pi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

此外,在 $\cos x_2 \neq 0$ 情况下也可能有解。比如 $x_2 = 0$ 时的解是

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{mgdN}{K} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

可见 x^* 覆盖 x^e , 但是 x^* 并不完全等同于式(19-18)的 x^e 。

19.2.4.3 原点 $x=0$ 的像点

注意到 $f(x)$ 在原点 $x=0$ 的值为

$$f(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{mgd}{J_2} \end{bmatrix}^T \neq 0$$

知系统原点 $x=0$ 不是系统的平衡点。系统原点 $x=0$ 在坐标变换和反馈线性化以后,在 z 坐标下对应的点是

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 - \frac{mgd}{J_2} & \frac{F_2 mgd}{J_2^2} \end{bmatrix}^T$$

可见它与原点 $z=0$ 不相互对应。

19.2.4.4 原点 $z=0$ 的原像点

$z=0$ 的原像点满足 $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$, 可求得

$$x = \begin{bmatrix} \frac{mgdN}{K} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

可见它与原点 $x=0$ 不相互对应。

19.2.5 通过反馈移动原系统的平衡点

式(19-18)的平衡点 $x_2^e = \frac{l\pi}{2} \neq 0$, 这意味着杆件的水平位置 $x_2 = q_2 = 0$ 不是平衡点。

这是很不方便的。为使 $x_2 = q_2 = 0$ 成为系统平衡点,应通过在原反馈 \bar{u} 上加静反馈分量,移动平衡点。如取

$$u = \bar{u} - C = \frac{-L^4 f^h(x) + v}{L_g L^3 f^h(x)} - C \quad (19-19)$$

则相当 $f(x)$ 增为 $f(x) + Cg(x)$ 。这时式(19-14)变为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u = f(x) + g(x)C + g(x)\bar{u} \\
y &= h(x) = x_2 = q_2
\end{aligned} \quad (19-20)$$

对应的新平衡点 x^α 满足

$$f(x^\alpha + g(x^\alpha)C = 0 \quad (19-21)$$

指定 $x_2^\alpha = 0$, 把此式展开后得

$$\begin{aligned} x_3^\alpha &= 0 & x_4^\alpha &= 0 \\ -\frac{K}{J_1 N^2} x_1^\alpha + C \frac{1}{J_1} &= 0 \\ \frac{K}{J_2 N^2} x_1^\alpha - \frac{mgd}{J_2} &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$x_1^\alpha = \frac{mgdN}{K} \quad C = \frac{mgd}{N}$$

综合为

$$x^\alpha = \left[\frac{mgdN}{K} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

新平衡点 x^α 变换后, 对应于点 $z^{*c} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{mgd}{J_2} \quad -\frac{F_2}{J_2} \frac{mgd}{J_2} \right]^T$ 。

19.2.6 通过反馈移动平衡点后系统的线性化

应当指出, 在本例中, 反馈回路增加了常数 C 以后, 虽然 $f(x)$ 改变为 $\bar{f} = f(x) + Cg(x)$, 但是各李导数, 除 $L_f^4 h(x)$ 外, 并未改变, 所以线性化坐标和线性化结果保持不变。为便于比较, 下面给出 $f(x)$ 改变为 $\bar{f}(x) = f(x) + Cg(x)$ 后的线性化结果。系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{f}(x) + g(x)u \\ y &= h(x) = q_2 \end{aligned} \quad (19-22)$$

式中

$$\begin{aligned} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{f}(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{K}{J_1 N^2} x_1 + \frac{K}{J_1 N} x_2 - \frac{F_1}{J_1} x_3 + \frac{C}{J_1} \\ \frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ u &= T \end{aligned}$$

计算系统式(19-22)的相对阶。对于 $k=0$, 有 $L_g h(x) = 0$; 对于 $k=1$, 有

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} \bar{f}(x) = x_4$$

$$L_g L_f h(x) = 0$$

对于 $k=2$, 有

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \bar{f}(x) = \frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4$$

$$L_g L_f^2 h(x) = 0$$

对于 $k=3$, 有

$$\begin{aligned}
L_f^3 h(x) &= \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x} \bar{f}(x) \\
&= \frac{K}{J_2 N} x_3 - \left(\frac{K}{J_2} + \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \right) x_4 - \frac{F_2}{J_2} \left(\frac{K}{J_2 N} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F_2}{J_2} x_4 \right) \\
L_g L_f^3 h(x) &= \frac{K}{J_1 J_2 N} \neq 0
\end{aligned}$$

结果得相对阶 $r = n = 4$ 。在与式(19-16)同样的坐标变化下,得到正则形式

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= L_f^4 h(x) + L_g^3 h(x) u
\end{aligned}$$

注意到

$$L_g^4 h(x) = \frac{\partial L_g^3 h}{\partial x} \bar{f}(x) = \frac{\partial L_f^3 h}{\partial x} \bar{f}(x) = L_f^4 h(x) + CL_g L_f^3 h(x)$$

线性化反馈

$$\bar{u} = \frac{-L_f^4 h(x) + v}{L_g L_f^3 h(x)} = \frac{-L_f^4 h(x) + v}{L_g L_f^3 h(x)} - C = u - C \quad (19-23)$$

19.3 单机无穷大电力系统的励磁控制

19.3.1 系统方程

单机无穷大系统的数学模型可按参考文献[5],[6]给出的形式写为

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} &= \omega - \omega_0 \\
\dot{\omega} &= \frac{\omega_0}{H} P_m - \frac{D}{H} (\omega - \omega_0) - \frac{\omega_0 E'_q V_s}{H x'_{d\Sigma}} \sin \delta \\
\dot{E}'_q &= -\frac{1}{T'_d} E'_q + \frac{1}{T_{d0}} \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta + \frac{1}{T_{d0}} V_f
\end{aligned} \quad (19-24)$$

式中 δ ——发电机转子运行角(电弧度);

ω, ω_0 ——发电机转子电角速度和同步电角速度;

E'_q ——发电机 q 轴暂态电势;

P_m ——发电机输入机械功率;

x'_d ——发电机暂态电抗;

x_T, x_{TL} ——变压器电抗和输电线路电抗;

$x'_{d\Sigma} = x'_d + x_T + x_{TL}$

T_{d0} ——励磁绕组时间常数;

T'_d ——定子闭路时的励磁绕组时间常数;

V_s, V_f ——无穷大系统母线电压幅值和发电机的励磁电压;

H, D ——发电机组转子的转动惯量和阻尼系数。

据此,注意到作励磁控制时假定 $P_m = P_{m0}$, P_{m0} 是初始稳态机械功率,可给出仿射形式的状态模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ x &= [E'_q \quad \omega \quad \delta]^T \\ f(x) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T'_d}E'_q + \frac{1}{T_{d0}}\frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}}V_s \cos\delta \\ -\frac{D}{H}(\omega - \omega_0) - \frac{\omega_0 E'_q V_s}{H x'_{d\Sigma}} \sin\delta + \frac{\omega_0 P_{m0}}{H} \omega - \omega_0 \\ \omega - \omega_0 \end{bmatrix} \\ g(x) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u &= V_f \end{aligned} \quad (19-25)$$

本节要实现的目标是,通过坐标变换和状态反馈使系统完全精确线性化,使系统变换为一个如下形式的完全能控的线性系统。

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad \dot{z}_2 = z_3 \quad \dot{z}_3 = v_0$$

19.3.2 检验精确线性化问题可解的充要条件

首先验证定理 12.6 的条件式(12-36a)。为此计算

$$g(x) = [1/T_{d0} \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g(x) &= \frac{\partial g}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T'_d} & 0 & -\frac{1}{T_{d0}}\frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}}V_s \sin\delta \\ -\frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma}} \sin\delta & -\frac{D}{H} & -\frac{\omega_0 E'_q V_s}{H x'_{d\Sigma}} \cos\delta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma} T_{d0}^2} \\ \frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma} T_{d0}} \sin\delta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

进而计算

$$[g(x), \text{ad}_f g(x)] = \frac{\partial \text{ad}_f g}{\partial x^T} - \frac{\partial g}{\partial x^T} \text{ad}_f g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma} T_{d0}} \sin\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因为 $[g(x), \text{ad}_f g(x)] = [0 \quad 0 \quad 0]^T \in D$, 满足式(12-36a)。其次验证(12-36b)。计算向量场

$$\text{ad}_f^2 g = \frac{\partial(\text{ad}_f g)}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} \text{ad}_f g = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^T} \begin{bmatrix} \frac{x_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma} T_{d0}^2} \\ \frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma} T_{d0}} \sin\delta \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x^T} \begin{bmatrix} \frac{x_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma} T_{d0}^2} \\ \frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma} T_{d0}} \sin\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_{d\Sigma}'^2}{x_{d\Sigma}^2} \frac{1}{T_{d0}^3} \\ \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \left((\omega - \omega_0) \cos \delta + \frac{1}{T_d'} \sin \delta + \frac{D}{H} \sin \delta \right) \\ - \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \sin \delta \end{bmatrix}$$

进而计算矩阵

$$[C] = [g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \text{ad}_f^2 g(x^0)]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} & \frac{x_{d\Sigma}}{x_{d\Sigma}' T_{d0}^2} & \frac{x_{d\Sigma}^2}{x_{d\Sigma}'^2 T_{d0}^3} \\ 0 & \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \sin \delta & \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \left((\omega - \omega_0) \cos \delta + \left(\frac{1}{T_d'} + \frac{D}{H} \right) \sin \delta \right) \\ 0 & 0 & - \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \sin \delta \end{bmatrix} \quad (19-26)$$

并求出 $[C]$ 的行列式值

$$\det(C) = - \frac{1}{T_{d0}} \left(\frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \right)^2 \sin^2 \delta$$

可见,在域 $\Omega = \{E_q', \omega, \delta \mid \delta \neq 0, \pi\}$ 上,矩阵 C 满秩,满足条件式(12-36b)。综上可知,单机无穷大系统如满足精确线性化问题可解的充要条件,则必可找到输出函数 $\lambda(x)$,使系统相对阶等于 n 。

19.3.3 求输出函数 $\lambda(x)$ 使相对阶 $r=3$

根据式(12-34)求 $\lambda(x)$,其中式(12-34a)可写成

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^T} [g(x) \quad \text{ad}_f g(x)] = \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x_{d\Sigma}}{x_{d\Sigma}' T_{d0}^2} \\ \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}' T_{d0}} \sin \delta \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (19-27)$$

这是一个关于 λ 的偏微分方程。因为 $g(x), \text{ad}_f g(x)$ 中含有一些零值分量,使这个偏微分方程很容易解。本文采用直接观察的求解方法。通过观察,得解 $\lambda(x) = \delta - \delta_0$ 。

为验证所得结果的正确性,求 $\lambda(x) = \delta - \delta_0$ 时的相对阶 r ,并验证 $r = n = 3$ 。结果得

$$L_g \lambda(x) = 0, \quad L_g L_f \lambda(x) = 0, \quad L_g L_f^2 \lambda(x) = - \frac{\omega_0 V_s}{H x_{d\Sigma}'} \frac{1}{T_{d0}} \sin \delta$$

当 $\delta \neq 0, \pi$ 时, $L_g L_f^2 \lambda(x^0) \neq 0$ 按相对阶定义, $r = n = 3$ 。

19.3.4 坐标变换函数

在求得输出函数 $\lambda(x)$ 之后,坐标变换 $z = \phi(x)$ 取

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda(x) = \delta - \delta_0 \\ z_2 &= L_f \lambda(x) = \omega - \omega_0 \\ z_3 &= L_f^2 \lambda(x) = - \frac{D}{H} (\omega - \omega_0) - \frac{\omega_0 E_q' V_s}{H x_{d\Sigma}'} \sin \delta + \frac{\omega_0}{H} P_{m0} \end{aligned} \quad (19-28)$$

相应的反变换为

$$\delta = z_1 + \delta_0$$

$$\omega = z_2 + \omega_0$$

(19-29)

$$E'_q = \frac{x'_{d\Sigma}}{V_s \sin(z_1 + \delta_0)} \left(-\frac{H}{\omega_0} z_3 - \frac{D}{\omega_0} z_2 + P_{m0} \right)$$

19.3.5 为精确线性化应加的状态反馈

为简化公式表示,把 $f(x)$ 表示为比较简单的形式。因为

$$E'_q = -\frac{T_{d0}}{T_d'} E'_q - \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta$$

$f(x)$ 可表示为

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{d0}} E_q & \dot{\omega} & \omega - \omega_0 \end{bmatrix}^T$$

于是可算得

$$\begin{aligned} L^3_{f\lambda}(x) &= \frac{\partial L^2_{f\lambda}}{\partial x^T} f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma}} \sin \delta & -\frac{D}{H} & -\frac{\omega_0 E'_q V_s}{H x'_{d\Sigma}} \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{d0}} E_q \\ \dot{\omega} \\ \omega - \omega_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\omega_0 V_s}{T_{d0} H x'_{d\Sigma}} E_q \sin \delta - \frac{D}{H} \dot{\omega} - \frac{\omega_0 E'_q V_s}{H x'_{d\Sigma}} (\omega - \omega_0) \cos \delta \end{aligned} \quad (19-30)$$

$$\alpha(x) = -\frac{L^3_{f\lambda}(x)}{L^2_{g\lambda}(x)} = \frac{-L^3_{f\lambda}(x)}{-\frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma}} \frac{1}{T_{d0}} \sin \delta} \quad (19-31)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L^2_{g\lambda}(x)} = \frac{1}{-\frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma}} \frac{1}{T_{d0}} \sin \delta} \quad (19-32)$$

为线性化要加的反馈控制是

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v = \frac{\frac{\omega_0 V_s}{T_{d0} x'_{d\Sigma}} E_q \sin \delta - \frac{D}{H} \dot{\omega} - \frac{\omega_0 E'_q V_s}{H x'_{d\Sigma}} (\omega - \omega_0) \cos \delta + v}{-\frac{\omega_0 V_s}{H x'_{d\Sigma}} \frac{1}{T_{d0}} \sin \delta} \quad (19-33)$$

注意到输出有功功率为

$$P_e = \frac{V_s E_q}{x_{d\Sigma}} \sin \delta$$

输出无功功率为

$$Q_e = \frac{V_s E'_q}{x'_{d\Sigma}} \cos \delta - \frac{V_s^2}{x_{d\Sigma}}$$

和

$$T'_d = T_{d0} \frac{x'_{d\Sigma}}{x_{d\Sigma}}$$

得反馈控制律的实用形式为

$$u = E_q + \frac{\frac{D}{H}\dot{\omega} + \frac{\omega_0}{H}\left(Q_e + \frac{V_s^2}{x_{d\Sigma}}\right)\Delta\omega + v}{-\frac{\omega_0}{HT_d'}\frac{P_e}{E_q}} \quad (19-34)$$

19.3.6 变换后的系统

由变换式(19-30)求得 Jacobi 阵

$$\frac{\partial z}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\omega_0}{Hx_{d\Sigma}'}\sin\delta & -\frac{D}{H} & -\frac{\omega_0 E_q' V_s}{Hx_{d\Sigma}'}\cos\delta \end{bmatrix} \quad (19-35)$$

变换后的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x 坐标下的表示为

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} f(x) = \begin{bmatrix} \omega - \omega_0 \\ \dot{\omega} \\ \frac{\omega_0}{T_{d0}} \frac{V_s}{Hx_{d\Sigma}'} E_q \sin\delta - \frac{D}{H}\dot{\omega} - \frac{\omega_0}{Hx_{d\Sigma}'} E_q' (\omega - \omega_0) \cos\delta \end{bmatrix} \\ \bar{g}(x) &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega_0}{Hx_{d\Sigma}'} \frac{1}{T_{d0}} \sin\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

变换后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) &= \begin{bmatrix} \omega - \omega_0 \\ \dot{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z = Az \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x)\beta(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B \end{aligned}$$

精确线性化的最终结果是 Brunovsky 标准型

$$\dot{z} = Az + Bv = \begin{bmatrix} z_2 & z_3 & v \end{bmatrix}^T \quad (19-36)$$

第 20 章 m 入 m 出系统的坐标变换和部分线性化

本章和下一章共同构成多入多出非线性系统精确线性化的完整过程。为使层次更清楚,两章的功能依下面的原则进行划分:第 20 章覆盖有关坐标变换的内容;第 21 章覆盖有关状态反馈的内容。因为第 21 章在后,所以精确线性化所得到的总的结果将出现在第 21 章。本章 20.1 节定义了多入多出非线性系统的相对阶。20.2 节提供了精确线性化要使用的基础坐标变换函数集。20.3 节讨论多入多出非线性系统通过坐标变换达到部分线性化的方法,最后得到非线性系统的正则形式表示和准正则形式表示。20.4 节讨论 m 入 m 出系统的零输出问题。20.5 节讨论 m 入 m 出系统的准确跟踪非零指定输出问题。

20.1 m 入 m 出系统的相对阶

20.1.1 仿射型多入多出非线性系统的定义

仿射型多入多出系统的一般定义为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (20-1a)$$

或写成

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_i &= h_i(x) \quad i=1, \dots, p\end{aligned}\quad (20-1b)$$

式中,状态变量 $x \in U \subset R^n$, U 是流形 $N = R^n$ 上一开集;向量函数 $f, g_1, \dots, g_m \in R^n$, 定义在 U 上; m 维输入向量函数 $u \in J$, J 是允许控制集;输出向量函数 $h(x) \in Y$, Y 是 p 维的实值函数组成的线性空间。写成向量展开形式,为

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \\ h(x) &= \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(x) \end{bmatrix} \quad g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{i1} \\ \vdots \\ g_{im} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq m \\ g(x) &= [g_1(x) \quad \cdots \quad g_m(x)]\end{aligned}\quad (20-2)$$

同时假设函数 $f, \dots, f_n, g_{i1}, \dots, g_{im} (1 \leq i \leq m), h_1, \dots, h_p$ 光滑,即其任意阶导数连续。

20.1.2 仿射型 m 入 m 出非线性系统相对阶的定义

定义 20.1 对式(20-1)的多变量非线性系统,设 $p = m$, 如果点 $x^0 \in U$ 满足下面两条件,则称系统的(向量)相对阶(vector relative degree)为 r_1, \dots, r_m 。

(1)对所有 x^0 邻域的 x 和所有 $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq m, 0 \leq k < r_i - 1$, 满足

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad (20-3a)$$

(2)在 $x = x^0$ 点,下面的 $m \times m$ 阵是非奇异的。

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{bmatrix} \quad (20-3b)$$

下面对定义作一些说明。(1) r_i 和 h_i 的下标 i , 即行号, 是指输出通道号。 r_i 是一个整数。 g_j 的下标 j , 即列号, 是指输入通道号。(2)如用 $L_{g_j} L_f^k h_i(x)$ 记矩阵 $A(x^0)$ 的任一元素, 对给定 i , 对所有 $k < r_i - 1$, 要求式(20-3b)第 i 行对所有 x^0 邻域中的 x 为零, 即

$$[L_{g_1} L_f^k h_i(x) \quad L_{g_2} L_f^k h_i(x) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^k h_i(x)] = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

(3)对 $k = r_i - 1$, 要求第 i 行向量对 x^0 至少有一个非零元素。(4)要求各行之间和各列之间不能线性相关。(5)第 i 行的相对阶 r_i , 恰好等于当第 i 个输出 $y_i(t)$ 对 t 求导数时, 直到输入向量 $u(t^0)$ 至少有一个分量出现为止的求导次数。(6)此定义包含了单入单出相对阶的定义。在 x^0 , 对每个输出 h_i , 至少有一个输入 u_j , 它们二者构成的单入单出系统有相对阶 r_i 。而对任何其它输入的相对阶(如果存在的话)必定大于或等于 r_i 。(7)注意到矩阵可分解为

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{bmatrix} [g_1(x^0) \quad \cdots \quad g_m(x^0)]$$

当 $A(x^0)$ 非奇异时, $g_1(x^0), \dots, g_m(x^0)$ 必须是线性独立的, 同时 $dL_f^{r_1-1} h_1(x^0), \dots, dL_f^{r_m-1} h_m(x^0)$ 也必须是线性独立的。(8) $A(x^0)$ 非奇异的假设与单入单出情况下的控制量 u 的系数 $a(x^0) = L_g L_f^{r-1} h(x^0)$ 非零的假设相对应。

本章将只限于讨论相对阶有定义的系统。这样的系统, 其 $A(x^0)$ 阵非奇异。后面将看到, 有相对阶为把单入单出的结果推广到多人多出提供了保证。

注意, 相对阶无定义并不意味着不能线性化, 虽然, 这类问题不在本章讨论范围之内。

20.2 基于线性化坐标 $L_f^k h_i(x^0)$ 的坐标变换映射

20.2.1 全微分对偶向量 $dL_f^k h_i(x^0)$ ($k = 0, 1, \dots, r_i - 1; i = 1, \dots, m$) 是线性独立的

引理 20.1 设系统在 x^0 有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 则以下共 $\{r_1 + \dots + r_m\}$ 个行向

量彼此都是线性独立的

$$\begin{aligned} &dh_1(x^0), dL_f h_1(x^0), \dots, dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ &\vdots \\ &dh_m(x^0), dL_f h_m(x^0), \dots, dL_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{aligned}$$

证明 与引理 11.2 的证明很相似。不失一般性, 假设 $r_1 \geq r_i, 2 \leq i \leq m$, 即 r_1 最大。考虑 $r \times n = (r_1 + \dots + r_m) \times n$ 矩阵

$$Q = \text{col}(dh_1(x), \dots, dL_f^{r_1-1} h_1(x), \dots, dh_m(x), \dots, dL_f^{r_m-1} h_m(x))$$

和 $n \times mr_1$ 矩阵

$$P = [g_1(x), \dots, g_m(x), \dots, \text{ad}_f^{r_1-1} g_1(x), \dots, \text{ad}_f^{r_1-1} g_m(x)]$$

矩阵 P 具有最大可能的列数。使用恒等式 (11-2) 并依据相对阶定义, 可看到矩阵 QP 具有右下块三角结构(需重排行序)。其中右下方对角块由式 (20-3b) 的各行组成。这表明矩阵 QP 各行具有线性独立性。这也说明矩阵 Q 的各行具有线性独立性。得证。

20.2.2 以 $L_f^k h_i(x^0)$ 构成坐标变换函数集

推论 20.2

$$r_1 + \dots + r_m \leq n \quad (20-4)$$

证明 由引理 20.1, $\{r_1 + \dots + r_m\}$ 个全微分对偶行向量彼此都是线性独立的。又知道系统最大可能的线性独立行向量个数是 n , 因此必有 $r_1 + \dots + r_m \leq n$ 。

定理 20.3 设系统在 x^0 有(向量)相对阶。对 $1 \leq i \leq m$, 令

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x) &= h_i(x) \\ \phi_2^i(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{aligned} \quad (20-5)$$

如果 $r = r_1 + \dots + r_m$ 严格小于 n , 那么总能再找 $n - r$ 个函数 $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$, 补充后使

$$\phi(x) = [\phi_1^1(x), \dots, \phi_{r_1}^1(x), \dots, \phi_1^m(x), \dots, \phi_{r_m}^m(x), \phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)]^T$$

的 Jacobi 阵非奇异, 并因此可视 $\phi(x)$ 为 x^0 邻域一局部坐标变换, 而且补充的这些函数在 x^0 的值可以任意选择。此外, 如果分布

$$G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

在 x^0 邻域还是对合的, 则总可以找到 $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$, 使对所有 x^0 周围的 x 满足

$$L_{g_j} \phi_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m \quad (20-6)$$

证明 要证明的内容有三个: (1) 可以找到 $n - r$ 个函数; (2) 附加函数在 x^0 的值可以任意选择; (3) 总可使 $L_{g_j} \phi_i(x) = 0$ 。首先证明(1)。因为矩阵 $A(x^0)$ 可改写为

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{bmatrix} [g_1(x^0) \quad \dots \quad g_m(x^0)]$$

并且矩阵 $A(x^0)$ 是非奇异的, 所以 m 个向量 $g_1(x^0), \dots, g_m(x^0)$ 是线性独立的。因此分布

G 在附近是 m 维的。因为按假设,分布 G 是对合的,由 Frobenius 定理得知,存在 $n - m$ 个定义在 x^0 一邻域上的函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-m}(x)$, 使

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-m}\} = G^\perp \quad (20-7)$$

因为按相对阶定义, $G(x^0)$ 中所有向量 $g_1(x^0), \dots, g_m(x^0)$ 和 $r = r_1 + \dots + r_m$ 维对偶分布

$$\Omega = \text{span}\{dL_f^{r_i} h_i : 0 \leq k \leq r_i - 1, 1 \leq i \leq m\}$$

中所有对偶向量间分别正交, 只和其中的各 $dL_f^{r_i-1} h_i(x^0)$ 不正交, 甚至方向一致。可证在 x^0 不可能有同时满足 $g \in G(x^0), g \in \Omega^\perp(x^0)$ 的向量场 g , 即必有

$$G(x^0) \cap \Omega^\perp(x^0) = 0 \quad (20-8)$$

事实上, 如果不是这样, 则 $G(x^0)$ 中必存在以下形式的非零向量

$$g = \sum_{i=1}^m c_i g_i(x^0)$$

既属于 $G(x^0)$, 又属于 $\Omega^\perp(x^0)$ 。既然 g 属于 $\Omega^\perp(x^0)$, 它应当零化 $\Omega(x^0)$ 中的所有向量。即满足

$$\begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ dL_f^{r_2-1} h_2(x^0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{bmatrix} g = A(x^0) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = 0$$

因 $A(x^0)$ 满秩, 这意味着 $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$, 结果与是非零向量的假设相矛盾。式(20-8)的成立意味着

$$\dim(G^\perp(x^0) + \Omega(x^0)) = n \quad (20-9)$$

此式说明在 G^\perp 中可找到补齐 n 维的对偶向量场和相应的函数。不失一般性, 下面把找到的 $n - r$ 个函数记为

$$\begin{aligned} \phi_{r+1}(x) &= \lambda_1(x) \\ &\dots \\ \phi_n(x) &= \lambda_{n-r}(x) \end{aligned} \quad (20.10)$$

它们能做到使 $dh_1, dL_f h_1, \dots, dL_f^{r_1-1} h_1, \dots, dh_m, dL_f h_m, \dots, dL_f^{r_m-1} h_m, d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}$ 彼此线性独立。其次证明(2)。任何其它形如 $\lambda'_i(x) = \lambda_i(x) + c_i$, c_i 是常数的函数都满足(1)的要求, 因此, 这些函数在 x^0 的值可任意选择。最后证明(3)。可选择得使 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}$ 都分别与各向量场 g_j 正交, 即对 x^0 邻域的 x 和 $1 \leq i \leq n - r, 1 \leq j \leq m$, 满足

$$\langle d\lambda_i(x), g_j(x) \rangle = L_{g_j} \lambda_i(x) = 0$$

定理证毕。

把定理 11.4 的结果式(20-5)加上式(20-10)集中写在一起, 就是所要求的结果

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= h_1(x) \\ \phi_2(x) &= L_f h_1(x) \\ &\vdots \\ \phi_r(x) &= L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{r+1}(x) &= \lambda_1(x) \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= \lambda_{n-r}(x)\end{aligned}\quad (20-11)$$

或简写为

$$z_i = \phi_i(x) \quad 1 \leq i \leq n \quad (20-12)$$

定理 20.4 选择补加函数 $\phi_i(x)$ 满足式(20-6)是可能的, 当且仅当分布 $G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ 是对合的。

证明 (充分性) 如果非奇异的 m 维分布 G 是对合的, 则由 Frobenius 定理, 可找到 $n-m$ 个定义在 x^0 一邻域上的函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-m}(x)$, 使

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-m}\} = G^\perp$$

即

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} g_j(x) = L_{g_j} \phi_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m$$

(必要性) 假设

$$L_{g_j} \lambda_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n \quad i \leq j \leq m$$

即在 x^0 一邻域上存在函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-m}(x)$, 使

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} g_j(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m$$

由 Frobenius 定理知, 分布 G 是对合的。证毕。

对于单入单出系统, 因为 G 中只含一个向量场 $g(x)$, 必对合, 所以选择补加函数时, 不必提及以 $g(x)$ 对合作为前提条件。

20.3 系统通过坐标变换达到部分线性化

20.3.1 m 入 m 出系统在坐标变换后的正则形式表示

以下面的 $\phi(x)$ 作为线性化坐标

$$\phi(x) = [\phi_1^1(x), \dots, \phi_{r_1}^1(x), \dots, \phi_1^m(x), \dots, \phi_m^m(x), \phi_{r+1}(x), \dots, \phi_m(x)]^T \quad (20-13)$$

在新坐标下, 对上角标为 1 的一组, 变换后得

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1^1}{dt} &= \phi_2^1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d\phi_{r_1-1}^1}{dt} &= \phi_{r_1}^1(t)\end{aligned}$$

$$\frac{d\phi_{r_1}^1}{dt} = L_f^1 h_1(x(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_1(x(t)) u_j(x) = b_1 + \sum_{j=1}^m a_{1j} u_j(x)$$

令

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \vdots \\ \xi_{r_i}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^1(x) \\ \phi_2^1(x) \\ \vdots \\ \phi_{r_i}^1(x) \end{bmatrix} \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^m \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (20-14)$$

$$a_{ij}(\xi, \eta) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (20-15a)$$

$$b_i(\xi, \eta) = L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad 1 \leq i \leq m \quad (20-15b)$$

定义在 x^0 邻域上的相对阶为 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 的 m 入 m 出系统变换后的系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i & 1 \leq i \leq m \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i & 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (20-16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j & 1 \leq i \leq m \\ y_i &= \xi_1^i & 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m p_j(\xi, \eta) u_j = q(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) u \quad (20-17)$$

式(20-16), 式(20-17)被称为准正则形式(quasi-normal form)。如果分布 $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ 是对合的, 总可以选得 $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ 使 $P(\xi, \eta) = 0$, 从而有

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) \quad (20-18)$$

式(20-16), 式(20-18)被称为正则形式(normal form)。当然, 求得 $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ 不总是容易的, 因为需要解偏微分方程。

把 $\dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j, i \leq i \leq m$ 写成矩阵形式, 得

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_m}^m \end{bmatrix} = b(\xi, \eta) + A(\xi, \eta) u \quad (20-19)$$

式中

$$b(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} b_1(\xi, \eta) \\ \vdots \\ b_m(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad A(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\xi, \eta) & \cdots & a_{1m}(\xi, \eta) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\xi, \eta) & \cdots & a_{mm}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (20-20)$$

请读者注意, 式(20-20)中的 $A(\xi, \eta)$ 做坐标转换后, 正是相对阶定义式(20-3b)。

20.3.2 m 入 m 出系统变换后的平衡点

m 入 m 出系统坐标变换前的平衡点 x^0 , 在变换后与原点 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 相对应, 要求以下条件。

- (1) x^0 是变换前的平衡点, 满足 $f(x^0) = 0$ 。
- (2) $h_1(x^0) = \dots = h_m(x^0) = 0$ 。
- (3) $\phi_{r+1}(x^0) = \dots = \phi_n(x^0) = 0$ 。

20.4 m 入 m 出系统的零输出问题

20.4.1 m 入 m 出系统零输出问题的定义

参照第 13 章,给出下面的 m 入 m 出系统的零输出定义。

定义 20.2 下面的问题称为零输出问题:对于相对阶 $r = r_1 + \cdots + r_m < n$ 的 m 入 m 出非线性系统,寻找初始状态 x^0 和输入函数向量 $u(t)$ 构成的对子,使在 $t=0$ 邻域,所有时间内把输出向量 y 约束为恒等于零。

20.4.2 零动态方程

根据定义,因对所有 t 均有 $y=0$,所以必有

$$\begin{aligned} h_1(x(t)) &= L_f h_1(x(t)) = \cdots = L_f^{r_1-1} h_1(x(t)) = 0 \\ &\vdots \\ h_m(x(t)) &= L_f h_m(x(t)) = \cdots = L_f^{r_m-1} h_m(x(t)) = 0 \end{aligned}$$

由式(20-5)知,这也就是

$$\begin{aligned} \phi_1^1(x(t)) &= \phi_2^1(x(t)) = \cdots = \phi_{r_1}^1(x(t)) = 0 \\ &\vdots \\ \phi_1^m(x(t)) &= \phi_2^m(x(t)) = \cdots = \phi_{r_m}^m(x(t)) = 0 \end{aligned}$$

由式(20-14)知,这就是

$$\begin{aligned} \xi^1 &= 0 \\ &\vdots \\ \xi^m &= 0 \end{aligned}$$

和

$$\xi = 0$$

代入变换后式(20-16)和式(20-17),得

$$0 = y_i^{(r_i)} = \dot{\xi}_{r_i-1}^i = b_i(0, \eta(t)) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, \eta(t)) u_j(t) \quad i=1, \cdots, m \quad (20-21)$$

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) + \sum_{i=1}^m p_i(0, \eta(t)) u_i \quad (20-22)$$

写成向量形式

$$b(0, \eta(t)) + A(0, \eta(t)) u(t) = 0 \quad (20-23)$$

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) + P(0, \eta(t)) u(t) \quad (20-24)$$

由式(20-23)解得零输出控制律为

$$u(t) = -A^{-1}(0, \eta(t)) b(0, \eta(t)) \quad (20-25)$$

代入式(20-24),得

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) - P(0, \eta(t)) A^{-1}(0, \eta(t)) b(0, \eta(t)) \quad (20-26)$$

如令

$$q_0(\xi, \eta) = q(\xi, \eta) - P(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) \quad (20-27)$$

可简写为

$$\dot{\eta}(t) = q_0(0, \eta(t)) \quad \eta(0) = \eta^0 \quad (20-28)$$

这被称为零动态特性(zero dynamics)。

值得注意的是,给定一组 $\xi=0$ 和 $\eta=\eta^0$ 之后,所求得的 $u(t)$ 是唯一的。

20.4.3 由系统方程直接获得零输出问题的解

20.4.3.1 零动态空间

为产生零输出,即对所有时间 t 产生 $y(t)=0$,要求系统必须在式(20-29a)所示子集上演变

$$z^* = \{z \in R^n : z_1 = z_2 = \cdots = z_r = 0\} \quad (20-29a)$$

这是 $z=0$ 附近的一个 $n-r$ 维的光滑流形,被称为零动态空间(zero dynamics space)。零动态空间在 x 坐标系下的表示是

$$z^* = \{x \in R^n : \xi_{k+1}^i = \phi_{k+1}^i(x) = L_f^k h(x) = 0 \\ 0 \leq k \leq r_i - 1, 1 \leq i \leq m\} \quad (20-29b)$$

20.4.3.2 零输出问题的解

$y(t) \equiv 0$ 意味着

$$y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t) = \cdots = y^{(r-1)}(t) = 0$$

还意味着

$$0 = y^{(r)}(t) = b(x(t)) + A(x(t))u(t) = 0$$

由此得零输出问题应施加的控制为

$$u^*(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad (20-30)$$

式中, x 是 t 的函数。如把加了这一控制的系统视为下面的新系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u^*(x) = f^*(x) \quad (20-31)$$

则 z^* 是其状态空间,而且,如限定 f^* 只在 z^* 上活动,并把限于 z^* 上的向量场 $f^*(x)$ 特别记为 $f^*(x)|_{z^*}$,则 $f^*(x)|_{z^*}$ 正是系统的零动态特性。也就是说,在零输出状态下,从 z^* 上任一点出发的任何轨迹将始终保持在 z^* 中(对小的 t)。这一事实可证明如下。因为

$$\begin{bmatrix} dh_1(x) \\ dh_f h_1(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r_m-2} h_m(x) \\ dL_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} (f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i^*(x)) \\ = \begin{bmatrix} L_f h_1(x) + \sum L_{g_i} h_1(x)u_i^*(x) \\ L_f^2 h_1(x) + \sum L_{g_i} L_f h_1(x)u_i^*(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m(x) + \sum L_{g_i} L_f^{r_m-2} h_m(x)u_i^*(x) \\ L_f^{r_m} h_m(x) + \sum L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x)u_i^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f h_1(x) \\ L_f^2 h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

如果 $x \in z^*$, 即

$$h_1(x) = L_f h_1(x) = \cdots = L_f^{r_1-1} h_1(x) = \cdots = h_m(x) = L_f h_m(x) = \cdots = L_f^{r_m-1} h_m(x) = 0$$

可得

$$\begin{bmatrix} dh_1(x) \\ dh_f h_1(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r_m-2} h_m(x) \\ dL_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} (f(x) + g(x)u^*(x)) = 0$$

这说明向量场 $f^*(x)|_{z^*}$ 始终切于 z^* , 使运动轨迹始终保持在 z^* 中, 上述论断成立。

20.5 m 入 m 出系统的准确跟踪指定输出问题

20.5.1 m 入 m 出系统准确跟踪指定输出问题的定义

与零输出问题强迫输出 $y \equiv 0$ 不同, 本节将强迫准确跟踪指定的一般输出 $y_R(t)$ 。下面给出准确跟踪指定输出问题定义的多入多出版本。

定义 13.1 如果存在, 寻找由初始状态 x^0 与输入向量 u^* 组成的对子 (x^0, u^*) 。对 u^* 的要求是在 $t=0$ 一邻域所有 t 上有定义, 并对该邻域所有 t , 使系统输出向量 $y(t)$ 与指定的输出向量 $y_R(t)$ 完全一致。这个求对子 (x^0, u^*) 的问题被称为准确跟踪指定输出 $y_R(t)$ 问题。

准确跟踪指定输出问题, 实际上是一般控制问题的逆问题, 或者说是一个逆系统问题。一般控制问题是给定系统输入, 分析其输出响应, 而准确跟踪指定输出问题则恰好相反, 给定输出, 求需要的输入。

20.5.2 准正则形式系统的准确跟踪指定输出问题

20.5.2.1 系统假设和零动态方程

设原系统为式(20-1)。对于 $r < n$ 系统, 其准正则形式方程的简化表达形式见式(20-16), 即

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 & 1 \leq i \leq m \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1} &= \xi_{r_i} & 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (20-32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{r_i} &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j & 1 \leq i \leq m \\ y_i &= \xi_1 & 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (20-32)$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m p_i(\xi, \eta) u_i = q(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) u \quad (20-33)$$

假设原系统平衡点 x^e 与坐标变换后的平衡点 $z^e = 0$ 相对应。首先把输出

$$y = y_R(t) = [y_{1R}(t) \quad y_{2R}(t) \quad \cdots \quad y_{mR}(t)]^T$$

的条件代入系统方程。置

$$y_i = \xi_1^i = y_{iR} \quad 1 \leq i \leq m$$

于是有

$$\begin{aligned} \xi_2^i(t) &= \dot{\xi}_1^i(t) = y_{iR}^{(1)}(t) \quad 1 \leq i \leq m \\ &\dots \\ \xi_{r_i}^i(t) &= \dot{\xi}_{r_i-1}^i(t) = y_{iR}^{(r_i-1)}(t) \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

以上结果可综合表示为

$$\xi^i(t) = (\xi_1^i \quad \xi_2^i \quad \dots \quad \xi_{r_i}^i)^T = y_{iR}(t) \quad y_{iR}^{(1)}(t) \quad \dots \quad y_{iR}^{(r_i-1)}(t))^T = \xi_R^i(t) \quad 1 \leq i \leq m \quad (20-34)$$

和

$$\xi(t) = (\xi^1(t) \quad \dots \quad \xi^m(t))^T = \xi_R(t) \quad (20-35)$$

随后,把求得的 $\xi_R^i(t)$ 代入准正则方程式(20-32)和式(20-33),得

$$\dot{\xi}_{r_i}^i(t) = y_{iR}^{(r_i)}(t) = b_i(\xi_R(t), \eta(t)) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi_R(t), \eta(t)) u_j \quad 1 \leq i \leq m \quad (20-36a)$$

$$\dot{\eta}(t) = q(\xi_R(t), \eta(t)) + \sum_{i=1}^m p_i(\xi_R(t), \eta(t)) u_i \quad (20-36b)$$

写成向量形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{r_1}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_m}^m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1R}^{(r_1)}(t) \\ \vdots \\ y_{mR}^{(r_m)}(t) \end{bmatrix} = b(\xi_R(t), \eta(t)) + A(\xi_R(t), \eta(t)) u(t) \quad (20-37a)$$

$$\dot{\eta}(t) = q(\xi_R(t), \eta(t)) + P(\xi_R(t), \eta(t)) u \quad (20-37b)$$

20.5.2.2 准确跟踪指定输出问题的解

系统初始条件必须设定在 $\xi(0) = \xi_R(0)$, 而 $\eta(0) = \eta^0$ 可以任意选择。与此初始条件配对的控制, 由式(20-37a)决定。输入必须是

$$u(t) = A^{-1}(\xi_R(t), \eta(t))(-b(\xi_R(t), \eta(t)) + \begin{bmatrix} y_{1R}^{(r_1)}(t) \\ \vdots \\ y_{mR}^{(r_m)}(t) \end{bmatrix}) \quad (20-38)$$

代入式(20-37b), 得

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= q(\xi_R(t), \eta(t)) - P(\xi_R(t), \eta(t)) A^{-1}(\xi_R(t), \eta(t)) \\ &\quad - b(\xi_R(t), \eta(t)) + \begin{bmatrix} y_{1R}^{(r_1)}(t) \\ \vdots \\ y_{mR}^{(r_m)}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20-39)$$

此式就是内部动力学特性。用初始条件 $\xi(0) = \xi_R(0)$ 和 $\eta(0) = \eta^0$ 解此方程, 所得解 $\eta(t)$ 就是在准确跟踪指定输出工况下, 系统内部状态 η 的变化规律。式(20-38)表明, 控制必须随 $\eta(t)$ 的变化而即时改变。初始条件 $\xi(0) = \xi_R(0)$ 和 $\eta(0) = \eta^0$ 对应的控制构成了准确跟踪指定输出问题的解。对每组初始条件和来说, 控制式(20-38)是能保持输出等于 $\xi_R(t)$ 的唯一输入。

第 21 章 m 入 m 出系统的状态反馈线性化

本章讨论多人多出非线性系统精确线性化中有关状态反馈的内容。21.1 节从一般意义上就相对阶 $r = n$ 系统,讨论状态反馈线性化的一些基本问题,主要包括非线性系统状态反馈控制的一般形式,精确线性化问题的定义,(向量)相对阶在状态反馈后保持不变等问题。21.2 节讨论状态空间精确线性化问题的充要条件。21.3 节讨论给定输出函数且相对阶 $r = n$ 时的状态反馈线性化和输出函数按相对阶 $r = n$ 要求选择时的状态反馈线性化。21.4 节讨论相对阶 $r < n$ 系统的输入-输出线性化,或称外部线性化。21.5 节讨论 m 入 m 出系统的非交互控制问题,或称解耦问题,给出了非交互控制问题可解的充要条件。21.6 讨论 m 入 m 出系统的局部渐近稳定性。

21.1 m 入 m 出系统的状态反馈

21.1.1 状态反馈控制的一般形式

讨论仿射型 m 入 m 出系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y_i &= h_i(x) \quad i=1, \dots, m\end{aligned}\tag{21-1}$$

假设反馈输入 u 是状态 x 和新参考输入 v 的函数

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) v_j \quad 1 \leq i \leq m\tag{21-2a}$$

式中, $\alpha_i(x)$ 和 $\beta_{ij}(x)$ 都是定义在 R^n 一开子集上的标量光滑函数; $v = (v_1 \ \cdots \ v_m)^T$ 是新参考输入。为简化分析,设 v 与 u 同维。写成向量形式为

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v\tag{21-2b}$$

式中

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix} \\ \beta(x) &= \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \cdots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \cdots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix} = [\beta_1(x) \ \cdots \ \beta_m(x)]\end{aligned}$$

施加反馈后的 m 入 m 出系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \alpha_i(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) v_j$$

$$y_1 = h_1(x)$$

...

$$y_m = h_m(x)$$

为把 v_j 写成 v_i , 把最后一项的 i 和 j 交换, 并把两个 Σ 交换位置, 得到

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \alpha_i(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_j(x) \beta_{ji}(x) v_i \quad (21-3a)$$

$$y_1 = h_1(x)$$

...

$$(21-3a)$$

$$y_m = h_m(x)$$

写成向量形式是

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \quad (21-4a)$$

$$y = h(x) \quad (21-4b)$$

此外还假设矩阵 $\beta(x)$ 对所有 x 非奇异。式(21-2)被称为正规静态反馈(regular static state feedback)。

21.1.2 相对阶 $r = n$ 系统精确线性化问题的定义

定义 21.1 给定向量场 $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 和初始状态 x^0 , 寻找(如可能) x^0 的一邻域 U 和定义在 U 上的反馈函数 $\alpha(x), \beta(x)$, 坐标变换 $z = \phi(x)$ 以及矩阵 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, 使系统满足

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x) \alpha(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = Az \quad (21-5)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (g(x) \beta(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = B \quad (21-6)$$

和

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (21-7)$$

这一问题被称为状态空间精确线性化问题(state-space exact linearization problem)。

21.1.3 系统(向量)相对阶在状态反馈下保持不变

本小节将证明系统相对阶 $r_i, 1 \leq i \leq m$ 在施加正规静态反馈后是保持不变的。加了反馈后的系统方程可改写为

$$\dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x) v \quad (21-8a)$$

$$y = h(x) \quad (21-8b)$$

式中

$$\bar{f}(x) = f(x) + g(x) \alpha(x)$$

$$\bar{g}(x) = g(x) \beta(x)$$

$$\bar{h}(x) = h(x)$$

其展开形式为

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \quad (21-9a)$$

$$y = h(x) \quad (21-9b)$$

下面求加反馈后系统的相对阶。注意到式(12-26)和相对阶定义, 得

$$\begin{aligned}
L_f^k h_i(x) &= L_{f+ga}^k h_i(x) = L_f^k h_i(x) + L_{g_1 a_1} h_i(x) + \cdots + L_{g_m a_m} h_i(x) \\
&= L_f^k h_i(x) + L_{g_1} h_i(x) \alpha_1(x) + \cdots + L_{g_m} h_i(x) \alpha_m(x) \\
&= L_f^k h_i(x) \quad \forall 0 \leq k \leq r_i - 1, 1 \leq i \leq m
\end{aligned}$$

由此,对所有 $1 \leq i, j \leq m$, 对所有 x^0 邻域的 x 可推出

$$\begin{aligned}
L_{\bar{g}_j} L_f h_i(x) &= L_{(g\beta)_j} L_f^k h_i(x) + g a h_i(x) = L_{(g\beta)_j} L_f^k h_i(x) \\
&= L_{g\beta_j} L_f^k h_i(x) = L_{g_1 \beta_{1j}} L_f^k h_i(x) + \cdots + L_{g_m \beta_{mj}} L_f^k h_i(x) \\
&= \sum_{s=1}^m L_{g_s} L_f^k h_i(x) \beta_j(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq r_i - 1
\end{aligned}$$

式中, $(g\beta)_j$ 表示矩阵 $g\beta$ 的第 j 列; g_s 表示 g 的第 s 列; β_j 表示 β 的第 j 列。对所有 $1 \leq i \leq m$, 对 x^0 和 $k = r_i - 1$, 可推出

$$\begin{aligned}
&[L_{\bar{g}_1} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{\bar{g}_m} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)] \\
&= [L_{(g\beta)_1} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{(g\beta)_m} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)] \\
&= [L_{g_1 \beta_{11}} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) + \cdots + L_{g_1 \beta_{m1}} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{g_m \beta_{1m}} L_f^{r_i-1} h_i(x^0) + \cdots + L_{g_m \beta_{mm}} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)] \\
&= [L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)] \beta(x^0)
\end{aligned}$$

(此关系综合在一起可写成 $\bar{A}(x^0) = A(x^0) \beta(x^0)$ 。)

因此,如果矩阵 $\beta(x^0)$ 是非奇异的,则因为 $[L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)]$ 各分量的每一个都不为零,所以

$$[L_{\bar{g}_1} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{\bar{g}_m} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)] = [L_{(g\beta)_1} L_f^{r_1-1} h_i(x^0) \quad \cdots \quad L_{(g\beta)_m} L_f^{r_i-1} h_i(x^0)]$$

各分量的每一个都不为零。这表明系统(向量)相对阶 r_1, \dots, r_m 中的每一个在状态反馈下都是不变的。

21.2 状态空间精确线性化问题可解的充要条件

21.2.1 状态空间精确线性化问题可解的基本充要条件

定理 21.1 对于 m 入 m 出系统, 设矩阵 $g(x^0)$ 的秩为 m 。状态空间精确线性化问题可解的充要条件是: 存在 x^0 的一邻域 U 和定义在 U 上的 m 个实值函数 $h_1(x), \dots, h_m(x)$, 使系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \quad (21-10a)$$

$$y = h(x) \quad (21-10b)$$

在 x^0 有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \cdots + r_m = n$ 。

证明 (充分性) 对于有相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \cdots + r_m = n$ 的系统, 根据上一章定理 20.3 知, 选择定义在 x^0 邻域的坐标变换函数集

$$\xi_k^i(x) = \phi_k^i(x) = L_f^{k-1} h_i(x) \quad 1 \leq k \leq r_i \quad 1 \leq i \leq m$$

可把系统变换为 m 组以下形式的方程

$$\dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \quad 1 \leq i \leq m \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi) u_j \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

式中

$$b_i(\xi) = L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(\xi)) \quad a_{ij}(\xi) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(\xi))$$

因为矩阵 $A(\xi)$ 在 $\xi^0 = \phi^{-1}(x^0)$ 的一个邻域非奇异, 由方程

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = b(\xi) + A(\xi)u$$

可解得

$$u = A^{-1}(\xi)[-b(\xi) + v] = \alpha(x) + \beta(x)v$$

其中

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad \beta(x) = A^{-1}(x)$$

施加此反馈后, 得到新系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \quad 1 \leq i \leq m \\ & \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \quad 1 \leq i \leq m \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= v_i \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

已得到要求的结果, 充分性得证。(必要性) 十分接近定理 12.2 必要性的证明。假设系统已精确线性化, 已得到 Brunovsky 标准形解。要证明的是, 有相应的 m 个输出函数 $h_1(x), \dots, h_m(x)$, 使在 x^0 有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \dots + r_m = n$ 。现在把向量 $z = \phi(x)$ 分解为

$$z = \text{col}(z^1, \dots, z^m)$$

并取

$$y_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] z^i \quad 1 \leq i \leq m \quad (21-11)$$

以后通过直接计算容易表明, 以式(21-11)作为输出函数的共 m 个 Brunovsky 标准形线性系统具有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \dots + r_m = n$ 。最后, 引用(向量)相对阶在正规反馈和坐标变换下保持不变的结论, 知对应的变换前的输出函数 $h_1(x), \dots, h_m(x)$ 有同样的(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \dots + r_m = n$ 。于是得证。

21.2.2 状态空间精确线性化问题可解的充要条件

定理 21.2 设矩阵 $g(x^0)$ 的秩为 m 。状态空间精确线性化问题可解的充要条件是:

- (1) 对每个 $0 \leq i \leq n-1$, 分布 G_i 在 x^0 附近的维数不变;
- (2) 分布 G_{n-1} 的维数为 n ;
- (3) 对每个 $0 \leq i \leq n-2$, 分布 G_i 是对合的。

式中, 分布

$$G_0 = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_m\} \\
&\vdots \\
G_i &= \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq i \leq m\} \\
&\vdots \\
G_{n-1} &= \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}
\end{aligned} \tag{21-12}$$

证明 见下面的引理。下面的引理是引理 12.5 的多入多出版本。它不但给出了满足 $r_1 + \dots + r_m = n$ 的输出函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ 存在的充要条件, 而且同时给出了构造这些函数的方法。

引理 21.3 设矩阵 $g(x^0)$ 的秩为 m 。存在 x^0 邻域 U 和定义在 U 上的 m 个实值函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$, 使系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
y &= \lambda(x)
\end{aligned}$$

在 x^0 有相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \dots + r_m = n$ 的充要条件是:

- (1) 对每个 $0 \leq i \leq n-1$, 分布 G_i 在 x^0 附近的维数不变;
- (2) 分布 G_{n-1} 的维数为 n ;
- (3) 对每个 $0 \leq i \leq n-2$, 分布 G_i 是对合的。

证明 (引理充分性的证明) 也就是在三条件成立假设下, 求出 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$, 使 $r_1 + \dots + r_m = n$ 。具体地说, 所求 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ 应满足的要求是:

①按相对阶定义, 对所有 x^0 附近的 x 满足

$$L_{g_j} L_f^k \lambda_i(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq r_i - 2 \quad 1 \leq i \leq m \tag{21-13}$$

由引理 11.1, 此式等价于

$$L_{\text{ad}_f^k g_j} \lambda_i(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq r_i - 2 \quad 1 \leq i \leq m \tag{21-14a}$$

或写成

$$\frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x} \text{ad}_f^k g_j(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq r_i - 2 \quad 1 \leq j \leq m \tag{21-14b}$$

$$\langle d\lambda_i(x), \text{ad}_f^k g_j(x) \rangle = 0 \quad 0 \leq k \leq r_i - 2 \quad 1 \leq j \leq m \tag{21-14c}$$

由式(21-12)可见, 式(21-14c)左端后项, 正是分布 G_{r_i-2} 所包含的各基底向量场。如记 G_{r_i-2} 的正交对偶分布为

$$G_{r_i-2}^\perp = (\text{span}\{\text{ad}_f^k g_j(x) : 0 \leq k \leq r_i - 2, 1 \leq i \leq m\})^\perp$$

则上面的三种写法都分别等价于

$$d\lambda_i \in G_{r_i-2}^\perp \tag{21-14d}$$

②按相对阶定义求 x^0 使 $A(x^0)$ 在 x^0 非奇异

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} \lambda_m(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_m(x^0) \end{bmatrix}$$

③ $r_1 + \dots + r_m = n$ 。

让我们按上述要求依以下步骤寻找 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ 。

第一步,寻找头 m_1 个输出函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$ 。包括以下三小步。

1° 确定 m_1 的值。因为,由假设(1), G_0, \dots, G_{n-1} 各自的维数不变,由假设(2), $\dim(G_{n-1}) = n$ 。让我们由 G_{n-1} 开始,顺序地降低其下标值,找分布 G_i 的维数第一次由 n 降低到低于 n 的分界点,并把第一次找到的维数低于 n 的分布记为 G_{K-2} ,即 $\dim(G_{K-1}) = n$, $\dim(G_{K-2}) < n$ 。整数 $K \leq n$, $K-1$ 是使分布 G_i 尚能保持为 n 维的最小下标号。最大可能的值 $K = n$ 对应 $\dim(G_{n-1}) = n$, $\dim(G_{n-2}) < n$ 。第一次维数降低值

$$m_1 = n - \dim(G_{K-2}) \quad (21-15)$$

即

$$\dim(G_{K-2}) = n - m_1$$

2° 给出 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$ 应满足的公式。由假设(3), G_{K-2} 是对合的,再由 Frobenius 定理, G_{K-2} 是可积的,即可找到 m_1 个函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$, 使 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}$ 在 x^0 邻域张成 G_{K-2}^\perp , 得

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}\} = G_{K-2}^\perp \quad (21-16)$$

至此,知在满足充要条件(1), (2), (3)情况下,可根据 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}$ 与 G_{K-2} 正交的条件由式(21-17)找到 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$, 有

$$\begin{aligned} \langle d\lambda_i(x), \text{ad}_f^k g_j(x) \rangle &= 0 \\ 0 \leq k \leq K-2 \quad 1 \leq j \leq m \quad 1 \leq i \leq m_1 \quad &\text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x \end{aligned} \quad (21-17)$$

3° 证明这样的 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$ 满足要求①, ②, ③。对①, 因式(21-14)可改写为

$$L_{\text{ad}_f^k g_j} \lambda_i(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq K-2 \quad 1 \leq j \leq m \quad 1 \leq i \leq m_1 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x$$

由引理 11.1, 此式等价于

$$L_{g_j} L_f^k \lambda_i(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq K-2 \quad 1 \leq j \leq m \quad 1 \leq i \leq m_1 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x \quad (21-18)$$

对②, 用 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$ 为输出函数构成矩阵 $A(x)$ 的前 m_1 行, 得 $m_1 \times m$ 阵

$$A^1(x) = \{a_{ij}^1(x)\} = \{L_{g_j} L_f^{K-1} \lambda_i(x)\} \quad 1 \leq j \leq m \quad 1 \leq i \leq m_1$$

矩阵 $A^1(x)$ 在 x^0 的秩为 m_1 。其证明如下: 如果 $A^1(x)$ 阵行不满秩, 则某行可用另外的行线性表示, 即存在不全为零的实数 c_1, \dots, c_{m_1} , 使

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i L_{g_j} L_f^{K-1} \lambda_i(x^0) = 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

注意引理 11.2 证明中的简化恒等式, 当取 $j=0, i=K-1$ 时, 该简化恒等式可写成

$$\langle dh(x), \text{ad}_f^{K-1} g(x) \rangle = \sum_{l=1}^{K-1} (-1)^l \binom{K-1}{l} L_g L_f^l h(x)$$

用这里的 $g_j(x), \lambda_i(x)$ 分别代替此式中的 $g(x)$ 和 $h(x)$, 并注意到式(2-18), 得

$$\langle d\lambda_i(x), \text{ad}_f^{K-1} g_j(x) \rangle = (-1)^{K-1} L_{g_j} L_f^{K-1} \lambda_i(x)$$

把此式运用于我们的证明过程, 得

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^k g_j(x^0) \rangle = 0 \quad 0 \leq k \leq K-1 \quad 1 \leq j \leq m$$

再加上式(21-18),得

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^k g_j(x^0) \rangle = 0 \quad 0 \leq k \leq K-1 \quad 1 \leq j \leq m$$

这说明

$$\sum_{i=1}^m c_i d\lambda_i(x^0) \in G_{K-1}^\perp(x^0)$$

因为 $\dim(G_{K-1}) = n$, G_{K-1}^\perp 必为零维, 所以左端向量必为零。这意味着所有 c_i 都为零, 因为行向量 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}$ 都是线性独立的。于是, 矩阵 $A^1(x)$ 在 x^0 的秩为 m_1 得证。对③, 因为矩阵 $A^1(x)$ 的 m_1 行的每行的相对阶都是 K , 所以有

$$r_1 + \dots + r_{m_1} = K + \dots + K = m_1 K$$

如果这里的 $m_1 = m$, 则满足了要求①和②。此外, 一方面, 由式(20-4)知有

$$r_1 + \dots + r_{m_1} = m_1 K = mK \leq n$$

另一方面, 因为 m 个输出的相对阶都为 K , 这是最大可能值, 所以

$$n = \dim(G_{K-1}) \leq mK$$

可见必然 $r_1 + \dots + r_m = mK = n$, 满足了要求③。因为满足了①, ②, ③, 所以 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$ 即为所求。问题充分性得证。如果 m_1 严格小于 m , 则继续做下一轮, 在张成 G_{K-3}^\perp 的全微分对偶向量场中寻找其余的 $m - m_1$ 个输出函数。

第二步, 寻找后续的 m_2 个输出函数 $\lambda_{m_1+1}(x), \dots, \lambda_{m_1+m_2}(x)$ 。包括以下三小步。

1° 确定 m_2 的值。确定 m_2 值时不再如第1步那样以判断分布 G_i 维数的降低为依据, 而改为以判断其正交对偶分布 G_i^\perp 的维数提高为依据。分布 G_{K-2} 被替换为 G_{K-3} 必然降维, 相应地, G_{K-2}^\perp 被替换为 G_{K-3}^\perp 必然升维。因为由式(21-16), 已知

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}\} = G_{K-2}^\perp$$

所以首先, 让我们证明对偶分布

$$\Omega_1 = \text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}, dL_f \lambda_1, \dots, dL_f \lambda_{m_1}\}$$

必属于 G_{K-3}^\perp , 即 $\Omega_1 \in G_{K-3}^\perp$ 。事实上, 因为 $G_{K-3} \subset G_{K-2}$, 所以 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1} \in G_{K-2}^\perp \subset G_{K-3}^\perp$ 。

同时, 注意引理 11.2 证明中的简化恒等式, 当取 $j=1, i=k$ 时, 该简化恒等式可写成

$$\langle dL_f h(x), \text{ad}_f^k g(x) \rangle = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} L_f^{k-l} L_g L_f^{1+l} h(x)$$

注意到式(21-18)成立的条件, 当 $1+l$ 的最大可能值 $1+k \leq K-2$ 时, 即 $k \leq K-3$ 时, 右端

$$\sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} L_f^{k-l} L_g L_f^{1+l} \lambda_i(x) = 0$$

得到

$$\langle dL_f \lambda_i(x), \text{ad}_f^k g_j(x) \rangle = 0 \quad 0 \leq k \leq K-3, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq m_1 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x$$

这说明 $dL_f \lambda_1, \dots, dL_f \lambda_{m_1} \in G_{K-3}^\perp$ 。

其次, 让我们证明对偶分布 Ω_1 在 x^0 附近的维数为 $2m_1$ 。事实上, 如果 Ω_1 在 x^0 的维数小于 $2m_1$, 则 Ω_1 中某个对偶向量可用另外的对偶向量线性表示, 即存在不全为零的实数 c_1, \dots, c_{m_1} 和 d_1, \dots, d_{m_1} , 使

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i d\lambda_i(x^0) + d_i dL_f \lambda_i(x^0) = 0 \quad (21-19)$$

因为零与任何向量场的点积为零,所以有

$$\left\langle \sum_{i=1}^m (c_i d\lambda_i(x^0) + d_i dL_f \lambda_i(x^0)), \text{ad}_f^{K-2} g_j(x^0) \right\rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

注意到式(12-17),得

$$\sum_{i=1}^m d_i \langle dL_f \lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2} g_j(x^0) \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

由引理 11.2 可知

$$\langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-1} g_j(x^0) \rangle = L_f \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2} g_j(x^0) \rangle - \langle dL_f \lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2} g_j(x^0) \rangle$$

再次注意到式(12-17),得

$$\sum_{i=1}^{m_1} d_i \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-1} g_j(x^0) \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

因为 $\langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-1} g_j(x^0) \rangle \neq 0$, 各 $d\lambda_i$ 线性独立, 矩阵 $A^1(x)$ 各行线性独立, 所以可断定所有 d_i 为零。代回式(21-19)知所有 c_i 必为零。这与假设矛盾, Ω_1 的维数等于 $2m_1$ 的事实得证。

由以上证明结果: Ω_1 在 x^0 附近为 $2m_1$ 维, 并且 $\Omega_1 \subset G_{K-3}^\perp$ 。根据已知的 $\dim(G_{K-3})$ 值, 可推得 $\dim(G_{K-3}^\perp)$ 值。据此可求得

$$m_2 = \dim(G_{K-3}^\perp) - 2m_1$$

2° 给出求 m_2 个输出函数 $\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}$ 的公式。由假设(3), G_{K-3} 是对合的, 再由 Frobenius 定理, G_{K-3} 是可积的, 也就是说, 可找到 $2m_1 + m_2$ 个函数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}, L_f \lambda_1, \dots, L_f \lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}$ 使它们对应的全微分对偶向量场在 x^0 邻域张成 G_{K-3}^\perp , 即

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}, dL_f \lambda_1, \dots, dL_f \lambda_{m_1}, d\lambda_{m_1+1}, \dots, d\lambda_{m_1+m_2}\} = G_{K-3}^\perp \quad (21-20)$$

G_{K-3}^\perp 除包含 Ω_1 中列出的 $2m_1$ 个对偶向量场以外, 又增加了 $d\lambda_{m_1+1}, \dots, d\lambda_{m_1+m_2}$, 可表示为

$$G_{K-3}^\perp = \Omega_1 + \text{span}\{d\lambda_i(x), m_1+1 \leq i \leq m_1+m_2\} \quad (21-21)$$

新增的 $d\lambda_{m_1+1}, \dots, d\lambda_{m_1+m_2}$ 要满足的条件是, 既要独立于 Ω_1 , 又要正交于 G_{K-3} 。

$d\lambda_{m_1+1}, \dots, d\lambda_{m_1+m_2}$ 与 G_{K-3} 正交的条件, 可写为

$$\begin{aligned} \langle d\lambda_i(x), \text{ad}_f^k g_j(x) \rangle &= 0 \quad 0 \leq k \leq K-3 \quad 1 \leq j \leq m \\ m_1+1 &\leq i \leq m_1+m_2 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x \end{aligned} \quad (21-22)$$

此式同时也就是求函数 $\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}$ 的公式。

3° 证明所得到的 $\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}$ 满足要求①, ②, ③。对①, 因式(21-22)可改写为

$$L_{\text{ad}_f^k g_j} \lambda_i(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq K-3 \quad 1 \leq j \leq m \quad m_1+1 \leq i \leq m_1+m_2 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x$$

由引理 11.1, 此式又等价于

$$L_{g_j} L_f^k \lambda_i(x) = 0 \quad 0 \leq k \leq K-3 \quad 1 \leq j \leq m \quad m_1+1 \leq i \leq m_1+m_2 \quad \text{对 } x^0 \text{ 邻域 } x \quad (21-23)$$

对②, 用 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x)$ 作为输出函数构成矩阵的前 m_1 行, 用 $\lambda_{m_1+1}(x), \lambda_{m_1+m_2}(x)$ 作

为输出函数构成矩阵的随后 m_2 行,得下面的 $(m_1 + m_2) \times m$ 阵

$$A^2(x) = \{a_{ij}^2(x)\}$$

式中

$$\begin{aligned} a_{ij}^2(x) &= \langle d\lambda_i(x), \text{ad}_f^{K-1}g_j(x) \rangle \quad 1 \leq i \leq m_1 \\ a_{ij}^2(x) &= \langle d\lambda_i(x), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x) \rangle \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \end{aligned}$$

矩阵 $A^2(x)$ 在 x^0 的秩为 $m_1 + m_2$ 。其证明如下:如果 $A^2(x)$ 阵行不满秩,则某行可用另外的行线性表示,即存在不全为零的实数 c_1, \dots, c_{m_1} 和 $d_{m_1+1}, \dots, d_{m_1+m_2}$, 使

$$-\sum_{i=1}^{m_1} c_i \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-1}g_j(x^0) \rangle + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0) \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

为了能由两部分中提出共同的 $\text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0)$,把第一部分作一变化。由引理 11.2 可知

$$\langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-1}g_j(x^0) \rangle = L_f \langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0) \rangle - \langle dL_f\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0) \rangle$$

再次注意到式(12-17),得

$$\langle d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-1}g_j(x^0) \rangle = -\langle dL_f\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0) \rangle$$

代入后得

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m_1} (c_i dL_f\lambda_i(x^0)) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i d\lambda_i(x^0), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0) \right\rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{m_1} (c_i dL_f\lambda_i(x^0)) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i d\lambda_i(x^0) \right), \text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0) \in (\text{span}\{\text{ad}_f^{K-2}g_j(x^0): 1 \leq j \leq m\})^\perp$$

因此有

$$\left(\sum_{i=1}^{m_1} (c_i dL_f\lambda_i(x^0)) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i d\lambda_i(x^0) \right) \in G_{K-2}^\perp$$

因为分布 G_{K-2}^\perp 是由 $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{m_1}$ 张成的,此式表明

$$\left(\sum_{i=1}^{m_1} c_i dL_f\lambda_i(x^0) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i d\lambda_i(x^0) \right) \in \text{span}\{d\lambda_i(x^0): 1 \leq i \leq m_1\}$$

而此式只能在所有 c_i 和 d_i 等于零时才能成立。这与假设相矛盾。于是,矩阵 $A^2(x)$ 在 x^0 的秩为 $m_1 + m_2$ 得证。对③,因为由式(21-18),矩阵 $A^2(x)$ 的前 m_1 行的每行的相对阶都是 K ,即

$$r_1 + \dots + r_{m_1} = K + \dots + K = m_1 K$$

并且由式(21-22),随后的 m_2 行的每行的相对阶都是 $K-1$,即

$$r_{m_1+1} + \dots + r_{m_1+m_2} = m_2(K-1)$$

如果 $m_1 + m_2 = m$,则满足了要求①和②。此外,一方面,由式(20-4),有

$$r_1 + \dots + r_{m_1} + r_{m_1+1} + \dots + r_m = m_1 K + m_2(K-1) \leq n$$

另一方面,因为后 m_2 个输出的相对阶都为 $K-1$,这是最大可能值,所以

$$n = \dim(G_{K-2}) + m_1 \leq m(K-1) + m_1 = m_1 K + m_2(K-1)$$

可见,必然有 $r_1 + \dots + r_{m_1} + r_{m_1+1} + \dots + r_m = m_1 K + m_2(K-1) = n$,满足了要求③。结果

$\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m_1}(x), \lambda_{m_1+1}(x), \dots, \lambda_{m_1+m_2}(x)$ 即为所求。问题充分性得证。如果 $m_1 + m_2$ 严格小于 m (注意这也包括 $m_2 = 0$ 的情况), 则必须继续做下一轮, 在张成 G_{K-4}^\perp 的全微分对偶向量场中, 寻找其余的 $m - m_1 - m_2$ 个输出函数。

第 k 步, 寻找最后的 m_k 个输出函数 $\lambda_{m_1+\dots+m_{K-1}+1}(x), \dots, \lambda_{m_1+\dots+m_K}(x)$ 。包括以下 3 小步。

1° 确定 m_K 的值。因为上一步(第 $K-1$ 步)已经找到输出函数 $\lambda_{m_1+\dots+m_{K-2}+1}, \dots, \lambda_{m_1+\dots+m_{K-1}}$ 共 m_{K-1} 个, 并求得 G_0^\perp 是由以下全微分对偶向量场共 $m_1 + \dots + m_{K-1}$ 个张成

$$\left\{ \begin{array}{ll} d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x), \dots, dL_f^{K-2} \lambda_i(x) & 1 \leq i \leq m \\ d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x), \dots, dL_f^{K-3} \lambda_i(x) & m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \\ \vdots & \vdots \\ d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x) & m_1 + \dots + m_{K-3} + 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_{K-2} \\ d\lambda_i(x) & m_1 + \dots + m_{K-2} + 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_{K-1} \end{array} \right. \quad (21-24)$$

因为 G_0 的维数是 m , 所以 G_0^\perp 的维数为 $n - m$, 于是得

$$n - m = \dim(G_0^\perp) = (K-1)m_1 + (K-2)m_2 + \dots + m_{K-1} \quad (21-25)$$

如果 $n - \dim(G_0^\perp)$ 严格大于零, 则进至本步(第 K 步)。作为最后的第 K 步, 所要找的输出函数个数 m_K , 应等于达到 m 尚不足之数, 即 $m_K = m - (m_1 + \dots + m_{K-1})$ 。第 K 步共找到输出函数的个数为

$$m_1 + \dots + m_K = m \quad (21-26)$$

2° 在第 K 步, 将找到 $\lambda_i(x), m_1 + \dots + m_{K-1} + 1 \leq i \leq m$ 共 m_K 个输出函数, 并给出 $m_1 + \dots + m_K$ 个全微分对偶向量。最后的结果是

$$\left\{ \begin{array}{ll} d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x), \dots, dL_f^{K-1} \lambda_i(x) & 1 \leq i \leq m \\ d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x), \dots, dL_f^{K-2} \lambda_i(x) & m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \\ \vdots & \vdots \\ d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x), dL_f^2 \lambda_i(x) & m_1 + \dots + m_{K-3} + 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_{K-2} \\ d\lambda_i(x), dL_f \lambda_i(x) & m_1 + \dots + m_{K-2} + 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_{K-1} \\ d\lambda_i(x) & m_1 + \dots + m_{K-1} + 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_K \end{array} \right. \quad (21-27)$$

用与上面证明对偶分布 Ω_1 维数为 $2m_1$ 相类似的方法, 可证明以上共 $Km_1 + (K-1)m_2 + \dots + 2m_{K-1} + m_K$ 个全微分对偶向量场, 在 x^0 邻域是相互独立的。用式(21-25), 消去式(21-26)中的 m , 知 m_K 满足关系式

$$Km_1 + (K-1)m_2 + \dots + 2m_{K-1} + m_K = n \quad (21-28)$$

用与上面证明式(21-18)、式(21-22)同样的方法可证明, 用上面所得到的输出函数作输出函数 $\lambda_i(x), i \leq m$ 的系统, 在 x^0 有相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 其中

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_i = K & 1 \leq i \leq m_1 \\ r_i = K-1 & m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_i = 2 & m_1 + \cdots + m_{K-2} + 1 \leq i \leq m_1 + \cdots + m_{K-1} \\ r_i = 1 & m_1 + \cdots + m_{K-1} + 1 \leq i \leq m \end{array} \right. \quad (21-29)$$

并且满足 $r_1 + \cdots + r_m = n$ 。

3° 满足了条件①式(21-13)的要求,同时也满足了条件②和③的要求。

至此完成了定理充分性的证明。

(引理必要性的证明)已知 $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_m(x)$ 使系统有相对阶 r_1, \cdots, r_m , 而且 $r_1 + \cdots + r_m = n$, 求证(1),(2)和(3)成立。也就是已知 $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_m(x)$ 满足条件①, ②和③, 求证(1),(2)和(3)成立。这可通过直接计算 $G_i, 1 \leq i \leq n-1$ 以后证明 G_i 满足(1),(2)和(3)即得。

21.2.3 定理 12.6 是定理 21.2 在单入单出情况下的形式

在单入单出情况下,定理 21.2 将得到简化。首先,分布 G_0, \cdots, G_{n-1} 将简化为

$$G_0 = \text{span}\{g\}, G_1 = \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}, \cdots, G_{n-1} = \{\text{ad}_f^k g : 0 \leq k \leq n-1\}$$

定理 21.2 的条件(2):“分布 G_{n-1} 的维数为 n ”相当于定理 12.6 的条件(1):“矩阵 $[g(x^0) \quad \text{ad}_f g(x^0) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-2} g(x^0) \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)]$ 的秩为 n ”。定理 21.2 的条件(3):“对每个 $0 \leq i \leq n-2$, 分布 G_i 是对合的 $i = n-2$ ”中的 $i = n-2$ 的情况,相当于定理 12.6 的条件(2):“分布 $D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \cdots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$ 是对合的”。注意到单入单出情况下有引理 12.7 成立,定理 12.6 的条件(2)可以替代定理 21.2 的条件(3)。

定理 12.6 的条件(1)还说明 G_{n-1} 的维数不变,即张成分布 G_{n-1} 的各向量场的维数不变,因而与定理 21.2 的条件(1)相当。在单入单出情况下,可以去掉与定理 21.2 的条件(1)相当的条件。

21.2.4 定理 21.2 在线性系统情况下的形式

在 m 入 m 出线性系统中,定理 21.2 中的分布 G_0, \cdots, G_{n-1} 将有以下的形式

$$\begin{aligned} G_0 &= \text{span}\{b_1, \cdots, b_m\} \\ G_1 &= \text{span}(b_1, \cdots, b_m, Ab_1, \cdots, Ab_m) \\ &\cdots \\ G_{n-1} &= \{A^k b_j : 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \end{aligned} \quad (21-30)$$

21.3 相对阶 $r = n$ 的 m 入 m 出系统的状态反馈线性化

21.3.1 给定输出函数且相对阶 $r = n$ 时的状态空间精确线性化

对于输出函数给定,有相对阶 $\{r_1, \cdots, r_m\}$, 且 $r_1 + \cdots + r_m = n$ 的系统,因为满足状态空

间精确线性化问题的基本充要条件,所以可实现精确线性化。根据上一章定理 20.3,选择定义在邻域的坐标变换函数集

$$\xi_k^i(x) = \phi_k^i(x) = L_f^{k-1} h_i(x) \quad 1 \leq k \leq r_i \quad 1 \leq i \leq m$$

可把系统变换为 m 组方程

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i & 1 \leq i \leq m \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i & 1 \leq i \leq m \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi) u_j & 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (21-31)$$

式中

$$b_i(\xi) = L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(\xi)) \quad a_{ij}(\xi) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(\xi))$$

把 $\dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi) u_j, 1 \leq i \leq m$ 写成矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_m}^m \end{bmatrix} = b(\xi) + A(\xi)u = \begin{bmatrix} b_1(\xi) \\ \vdots \\ b_m(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}(\xi) & \cdots & a_{1m}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\xi) & \cdots & a_{mm}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (21-32)$$

在此基础上,因为矩阵 $A(\xi)$ 在 $\xi^0 = \phi^{-1}(x^0)$ 的一个邻域非奇异,令

$$b(\xi) + A(\xi)u = v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

可解得为精确线性化应加的反馈为

$$u = A^{-1}(\xi)[-b(\xi) + v] \quad (21-33)$$

最后,得到 Brunovsky 标准形的系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i & 1 \leq i \leq m \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i & 1 \leq i \leq m \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= v_i & 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (21-34)$$

21.3.2 输出函数按相对阶 $r = n$ 要求选择时的状态空间精确线性化

事实上,在引理 21.3 充分性证明中,已经给出了输出函数按相对阶 $r = n$ 要求选择时的状态空间精确线性化问题的求解方法和步骤。本节将通过一个实例给出更具体的说明。

例 21.1 (m 入 m 出系统状态空间精确线性化)考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

1. 计算分布 G_i , 检验是否满足定理 21.2。

(1) $G_0 = \text{span}\{g_1, g_2\}$ 。 G_0 在 $x^0=0$ 邻域的维数为 2, 保持不变; $[g_1, g_2]=0 \in G_0$, G_0 是对合的。

(2) $G_1 = \text{span}\{g_1, g_2, \text{ad}_f g_1, \text{ad}_f g_2\}$ 。 式中

$$\text{ad}_f g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(x_1 - x_5) \\ -x_2 \sin(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}_f g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -(x_1 - x_5) \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

G_1 在 $x^0=0$ 邻域($x_1 - x_5 < \pi/2$)的维数为 4, 保持不变; 因为

$$\begin{aligned} [g_1, \text{ad}_f g_1](x) &= [g_1, \text{ad}_f g_2](x) = [g_2, \text{ad}_f g_1](x) = [g_2, \text{ad}_f g_2](x) = 0 \\ [\text{ad}_f g_1, \text{ad}_f g_2](x) &= \sin(x_1 - x_5) g_1(x) \end{aligned}$$

所以 G_1 是对合的。

(3) $G_2 = \text{span}\{g_1, g_2, \text{ad}_f g_2, \text{ad}_f^2 g_1, \text{ad}_f^2 g_2, \text{ad}_f^2 g_1, \text{ad}_f^2 g_2\}$ 。 G_2 在 $x^0=0$ 邻域的维数为 5, 已达最大, 并保持不变; 因为已是最高维, 所以 G_2 对合。

(4) G_3 : 因为 $G_2 \subset G_3$ 和 G_2 维数等于状态空间维数, 可知 G_3 维数为 5, 在 $x^0=0$ 邻域维数保持不变; 因为已是最高维, 所以 G_3 对合。

(5) G_4 : 因为 $G_3 \subset G_4$ 和 G_3 维数等于状态空间维数, 可知 G_4 维数等于状态空间维数 $n=5$ 。 在 $x^0=0$ 邻域维数保持不变; 因为已是最高维, 所以 G_4 对合。

综上所述, 满足了定理 21.2 各条件, 可以实现状态空间精确线性化。

2. 寻找 $\lambda_1 \cdots, \lambda_{m_1}$ 。 首先确定 K 值。 在本例中, 满足 $\dim(G_{K-2}) < n, \dim(G_{K-1}) = n$ 的 $K=3$ 。 其次, 确定 m_1 。

$$m_1 = n - \dim(G_{K-2}) = n - \dim(G_1) = 5 - 4 = 1$$

再次, 按 G_1 寻找 $\lambda_1(x)$ 。 $\lambda_1(x)$ 需满足

$$\text{span}\{d\lambda_1\} = G_{K-2}^\perp = G_1^\perp$$

即 $\langle d\lambda_1(x), \text{ad}_f^k g_j(x) \rangle = 0 \quad 0 \leq k \leq K-2=1 \quad 1 \leq j \leq m=2$

此式的一个解是 $\lambda_1(x) = x_1 - x_5$ 。 最后, 求相对阶定义矩阵 $A(x)$ 中与 $\lambda_1(x)$ 相应的子矩阵 $A^1(x)$, 有

$$A^1(x) = [L_{g_1} L_f^{K-1} \lambda_1(x) \quad L_{g_2} L_f^{K-1} \lambda_1(x)] = [L_{g_1} L_f^2 \lambda_1(x) \quad L_{g_2} L_f^2 \lambda_1(x)]$$

经运算求得

$$L_f \lambda_1(x) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} f(x) = f_1 - f_5 = x_2$$

$$L_f^2 \lambda_1(x) = \frac{\partial L_f \lambda_1}{\partial x} f(x) = f_2 = x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5$$

$$L_{g_1} L_f^2 \lambda_1(x) = (-x_4 \quad 0 \quad 1 \quad x_5 - x_1 \quad x_4) g_1(x) = \cos(x_1 - x_5)$$

$$L_{g_2} L_f^2 \lambda_1(x) = (-x_4 \quad 0 \quad 1 \quad x_5 - x_1 \quad x_4) g_2(x) = 1$$

所以

$$A^1(x) = [\cos(x_1 - x_5) \quad 1]$$

由 $L_{g_1} L_f^2 \lambda_1(x) \neq 0$ 和 $L_{g_2} L_f^2 \lambda_1(x) \neq 0$, 知 $A^1(x)$ 对应的相对阶为 3。 因为 $m_1 = 1 < m = 2$,

继续进行。

3. 按 $G_{K-3} = G_0$ 构造 $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_2}$ 。首先确定 m_2 值。定义对偶分布

$$\Omega_1 = \text{span}\{d\lambda_1(x), dL_f\lambda_1(x)\}$$

因为

$$d\lambda_1(x) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]$$

$$dL_f\lambda_1(x) = dx_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

所以是 $\Omega_1 = 2m_1 = 2$ 维, 定理 21.3 已证明 $\Omega_1 \in G_0^\perp$ 。因为已知 G_0 为 2 维, 所以 G_0^\perp 的维数为 3 维。

$$m_2 = \dim(G_{K-3}^\perp - 2m_1) = \dim(G_0^\perp) - 2 = 3 - 2 = 1$$

其次, 构造 $\lambda_2(x)$ 。 $\lambda_2(x)$ 需满足

$$\text{span}\{d\lambda_1(x), dL_f\lambda_2(x)\} = G_0^\perp$$

$d\lambda_2(x)$ 要在独立于 $d\lambda_1(x), dL_f\lambda_1(x)$ 的情况下, 满足

$$\langle d\lambda_1(x), g_j(x) \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq m = 2$$

此式的一个解是 $\lambda_2(x) = x_4$ 。最后, 求相对阶定义矩阵 $A(x)$ 中与 $\lambda_2(x)$ 相应的子矩阵 $A^2(x)$, 有

$$A^2(x) = [L_{g_1} L_f^{K-2} \lambda_1(x) \quad L_{g_2} L^{K-2} L_f(x)] = [L_{g_1} L_f \lambda_2(x) \quad L_{g_2} L_f \lambda_2(x)]$$

经运算求得

$$L_f \lambda_2(x) = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} f(x) = f_4 = x_5$$

$$L_{g_1} L_f \lambda_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f \lambda_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) g_2(x) = 1$$

所以

$$A^2(x) = [0 \ 1]$$

$A^2(x)$ 对应的相对阶为 2。至此, 已达到 $m = m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2$, 不必再继续。

4. 验证以上结果的相对阶。根据已求得的 $\lambda_1 = x_1 - x_5$ 和 $\lambda_2 = x_4$ 可得到

$$L_{g_1} \lambda_1(x) = L_{g_2} \lambda_1(x) = L_{g_1} L_f \lambda_1(x) = L_{g_2} L_f \lambda_1(x) = 0$$

$$L_{g_1} \lambda_2(x) = L_{g_2} \lambda_2(x) = 0$$

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 \lambda_1(x^0) & L_{g_2} L_f^2 \lambda_1(x^0) \\ L_{g_1} L_f \lambda_2(x^0) & L_{g_2} L_f \lambda_2(x^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{x^0=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按相对阶定义, $r = \{r_1 \ r_2\} = \{3 \ 2\}$, 满足 $r = r_1 + r_2 = 3 + 2 = n = 5$ 。

5. 精确线性化结果。线性化坐标取

$$\phi_1^1(x) = \lambda_1(x) = x_1 - x_5$$

$$\phi_2^1(x) = L_f \lambda_1(x) = x_2$$

$$\phi_3^1(x) = L_f^2 \lambda_1(x) = x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5$$

$$\phi_1^2(x) = \lambda_2(x) = x_4$$

$$\phi_2^2(x) = L_f \lambda_2(x) = x_5$$

以上线性化坐标, 在 $x^0 = 0$ 邻域构成了一个局部坐标变换。变换前预先计算

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 \lambda_1(x) & L_{g_2} L_f^2 \lambda_1(x) \\ L_{g_1} L_f \lambda_2(x) & L_{g_2} L_f \lambda_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

变换后,得到正则形式方程

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1$$

$$\dot{\xi}_2^1 = \xi_3^1$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3^1 &= [b_1(x) + a_{11}(x)u_1 + a_{12}(x)u_2]_{x=\phi^{-1}(\xi)} = [\cos(x_1 - x_5)u_1 + u_2]_{x=\phi^{-1}(\xi)} \\ &= (\cos \xi_1^1 \quad 1) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_1^2 = \xi_2^2$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2^2 &= [b_2(x) + a_{21}(x)u_1 + a_{22}(x)u_2]_{x=\phi^{-1}(\xi)} = [x_2^2 + u_2]_{x=\phi^{-1}(\xi)} \\ &= (\xi_2^1)^2 + (0 \quad 1) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

或写成另一种形式

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1$$

$$\dot{\xi}_2^1 = \xi_3^1$$

$$\dot{\xi}_1^2 = \xi_2^2$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_3^1 \\ \dot{\xi}_2^2 \end{bmatrix} &= [b(x) + A(x)u]_{x=\phi^{-1}(\xi)} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(\xi)} + \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(\xi)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\xi_2^1)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \xi_1^1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为线性化应加的静态反馈是

$$\begin{aligned} u &= (A^{-1}(x)[-b(x) + v])_{x=\phi^{-1}(\xi)} = A^{-1}(\xi)[-b(\xi) + v] \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left[-\begin{bmatrix} 0 \\ (x_2^2)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \cos \xi_1^1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left[-\begin{bmatrix} 0 \\ (\xi_2^1)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

最后线性化结果是

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1$$

$$\dot{\xi}_2^1 = \xi_3^1$$

$$\dot{\xi}_3^1 = v_1$$

$$\dot{\xi}_1^2 = \xi_2^2$$

$$\dot{\xi}_2^2 = v_2$$

变换后,系统成为 Brunovsky 标准形

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1 &= A_1 \xi^{-1} + b_1 v_1 \\ \dot{\xi}^2 &= A_2 \xi^2 + b_2 v_2 \end{aligned}$$

式中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

21.4 相对阶 $r < n$ 的 m 入 m 出系统的外部线性化

21.4.1 相对阶 $r < n$ 系统的输入-输出线性化

相对阶 $r < n$ 的系统,不满足精确线性化基本充要条件,难以使用本章和上一章介绍的方法实现状态空间精确线性化。造成系统相对阶 $r < n$ 的原因有多种,既可能是系统状态方程固有特性决定的,也可能是输出函数选择不当所导致的。相对阶 $r < n$ 的系统应降低要求,按以下方法做部分反馈线性化。这种部分反馈线性化也被称为输入-输出线性化或外部线性化,因为可保证系统的输入和输出间有理想的线性关系。

这种部分线性化方法可归结为两步:第一步,按第20章方法得到正则形式式(20-16)、式(20-18)或准正则形式式(20-16)、式(20-17);第二步,由式(20-19),取状态反馈

$$u = -A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + A^{-1}(\xi, \eta)v \quad (21-35)$$

结果得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 & 1 \leq i \leq m \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1} &= \xi_{r_i} & 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (21-36a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{r_i} &= v_i & 1 \leq i \leq m \\ y_i &= \xi_1 & 1 \leq i \leq m \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)v \\ &= \bar{q}(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)v \end{aligned} \quad (21-36b)$$

式(21-36b)用于准正则形式。对正则形式, $\dot{\eta}$ 与 v 无关,应当用

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) = \bar{q}(\xi, \eta) \quad (21-37)$$

按式(21-36a)和式(21-36b)可绘出系统结构框图(图21-1)。

从结构上说,相对阶 $r < n$ 的系统式(21-36)包含两大部分。一部分是 m 个积分器串构成的线性子系统,它决定了系统的输入输出工况。另一部分是一个 $n - r$ 维非线性系统,它表示系统的内部工况,状态 η 不影响输出。对第一部分,各积分器串中包含的积分器个数分别是 $r_i, 1 \leq i \leq m$ 个,各积分器串所包含的积分器个数不尽相同。可见 v_i 只能对 y_i 发挥控制作用,而 y_i 只能通过 v_i 加以控制。如果系统相对阶 $r = r_1 + \cdots + r_m = n$,则系统只包含第一部分,否则出现第二部分(见图21-1下方的框)。第二部分不会影响系统各输出,是不能观部分,所对应的共 $n - r$ 个状态 η 被称为内部状态。状态 η 中的一部分状态或全部状态可能会受输入 v 和外部状态 ξ 的影响,也可能 η 中所有状态都不受输入 v 和外部状态 ξ 的影响。

不论是否 $r = r_1 + \cdots + r_m = n$,只要相对阶 $\{r_1, \cdots, r_m\}$ 有定义,都可使输入-输出工况是线性系统工况,并对应如下对角形式的传递函数矩阵

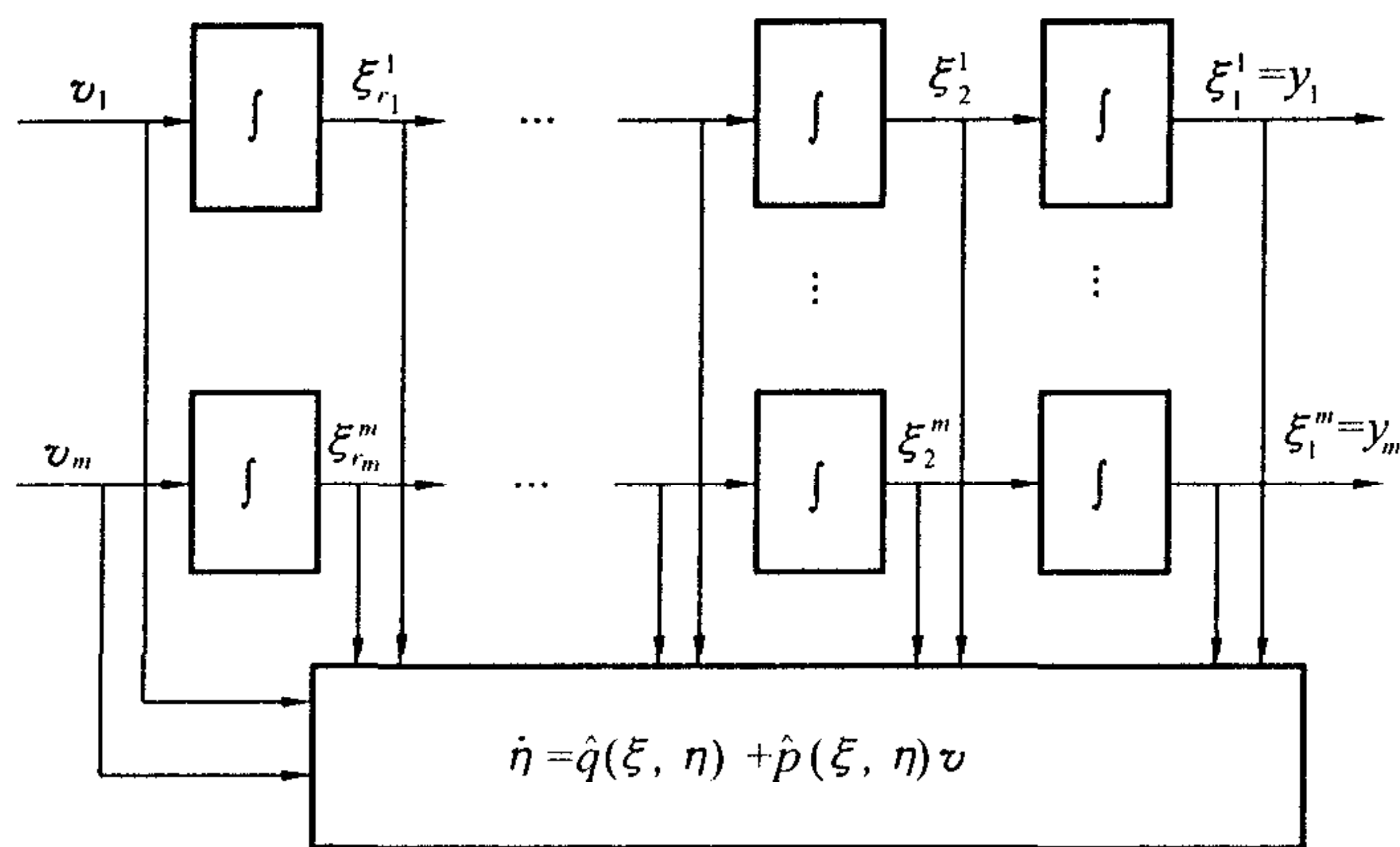


图 21-1 m 入 m 出系统部分线性化结构框图

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{r_1}} & & \\ & \frac{1}{s^{r_2}} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{s^{r_m}} \end{bmatrix}$$

在 x 坐标下, 式(21-35)可写成

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (21-38)$$

式中

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad \beta(x) = A^{-1}(x) \quad (21-39)$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (21-40)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (21-41)$$

21.5 相对阶 $r \leq n$ 的 m 入 m 出系统的解耦

21.5.1 m 入 m 出系统的非交互控制问题的定义

对于 m 入 m 出系统来说, 解耦就是把系统化简为 m 个单入单出通道的集合体。

定义 21.2 给定一非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (21-42)$$

$$y_i = h_i(x) \quad i = 1, \dots, m$$

和一初始点 x^0 。寻找定义在 x^0 一邻域 U 上的一个静态反馈控制律

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) v_j \quad (21-43)$$

使相应的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m g_i(x) \beta_{ij}(x) \right) v_j \\ y_i &= h_i(x) \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

中每个通道输出 $y_i, 1 \leq i \leq m$, 只受对应的通道输入 v_i 的影响, 而不受通道输入 $v_j, j \neq i$ 的影响, 即当输入 v_i 取同一值时, 不论其它 v_j 如何, 对应的 y_i 都取同一值。这被称为非交互控制问题(noninteracting control problem)或解耦问题(decoupling problem)。

21.5.2 m 入 m 出系统的非交互控制问题可解的充要条件

定理 21.4 非交互控制问题可解的充要条件是, 系统 x^0 在一邻域有相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 或等价地说是

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq m \quad k \leq r_i - 1$$

且 $A(x^0)$ 非奇异。

证明 (充分性) 一个有相对阶 (r_1, \dots, r_m) 的系统, 按第 20 章方法得到正则形式式 (20-16)、式 (20-18) 或准正则形式式 (20-16)、式 (20-17) 以后, 再施加式 (20-19) 的状态反馈, 即

$$u = A^{-1}(\xi, \eta) b(\xi, \eta) + A^{-1}(\xi, \eta) v$$

可得到式 (21-36) 所示的系统。系统结构框图如图 21-1。此结果表明, 解耦的要求已经达到。输入 v_1 通过一串 r_1 个积分器只影响输出 y_1 ; 输入 v_2 通过一串 r_2 个积分器只影响输出 y_2 , 等等。还看到, 所得到的闭环系统的输入输出工况是线性系统工况, 有对角的传递函数矩阵。充分性得证。

非交互控制式 (21-19) 在坐标系下的表示见式 (21-38), 即

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

对于任何在 $x = x^0$ 点相对阶有定义, 因而 $A(x^0)$ 阵非奇异的系统, 其非交互控制问题可借助于定义在点 x^0 邻域局部所有 x 的一个静态反馈来解决。反馈式 (21-38) 常被称为标准非交互反馈(standard noninteracting feedback)。矩阵 $A(x)$ 常被称为解耦矩阵(decoupling matrix)。

(必要性) 要证明的是, 施加了标准非交互反馈(它有非奇异的 $\beta(x^0)$) 后, 非交互问题有解必须

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq m \quad k < r_i - 1$$

且 $A(x^0)$ 阵非奇异。现假设 $\beta(x^0)$ 非奇异, 假设施加了标准非交互反馈 $u = \alpha(x) + \beta(x) v$ 后的闭环系统已变成非交互系统。因为非交互的结果说明已对某些整数 $r_i, 1 \leq i \leq m$ 满足了

$$L_{g_j} L_{f+g}^k h_i(x) = 0 \quad 0 \leq k < r_i - 1 \quad \forall 1 \leq i, j \leq m \quad \text{对所有 } x^0 \text{ 附近 } x$$

而且

$$[L_{g_{\beta_1}} L_{f+g}^{r_1-1} h_1(x^0) \quad \cdots \quad L_{g_{\beta_m}} L_{f+g}^{r_m-1} h_m(x^0)] \neq [0 \quad \cdots \quad 0] \quad 1 \leq i \leq m$$

的要求,所以,只要证明 $A(x^0)$ 非奇异就够了。考虑闭环系统第 i 个输出 $y_i(t)$ 的 r_i 阶导数

$$y_i^{(r_i)}(t) = L_{f+g}^{r_i} h_i(x(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_{f+g}^{r_i-1} h_i(x(t)) v_j(t) \quad 1 \leq i \leq m$$

因为系统非交互, $y_i(t)$ 只依赖于 $v_i(t)$, 所以, 由导数式可断定必有

$$L_{g_j} L_{f+g}^{r_i-1} h_i(x^0) = 0 \quad \forall j \neq i$$

这说明以下矩阵是一个对角阵

$$\bar{A}(x^0) = \{\bar{a}_{ij}(x^0)\} = \{L_{g_j} L_{f+g}^{r_i-1} h_i(x^0)\}$$

在 21.1.3 节中, 已指出 $\bar{A}(x^0)$, $A(x^0)$ 和 $\beta(x^0)$ 间有

$$\bar{A}(x^0) = A(x^0) \beta(x^0)$$

并且因为 $A(x^0)$ 的每一行都非零且 $\beta(x^0)$ 非奇异, 所以 $\bar{A}(x^0)$ 的每一行都非零。进一步, 因为 $\bar{A}(x^0)$ 对角且每一行都不为零, 所以 $\bar{A}(x^0)$ 必非奇异。从而 $A(x^0)$ 非奇异得证, 相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 存在。最后, 因 21.1.3 节已指出, 如果 $\beta(x^0)$ 非奇异, 则相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 在状态反馈下保持不变。根据这一性质, z 坐标下的相对阶也是 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 。必要性证毕。

定理表明, 解耦问题有解的充要条件是系统的相对阶存在(不要求 $r_1 + \dots + r_m = n$, 只要求 $r_1 + \dots + r_m \leq n$)。只就充分性而言, 这一条件与 $r < n$ 系统实现外部线性化的条件是相一致的。观察外部线性化结果式(21-26)可证实, 一个有相对阶的系统, 在实现外部线性化的同时, 已实现了解耦。

21.6 m 入 m 出系统的渐近稳定性

21.6.1 系统的大闭环反馈

对于相对阶 $r \leq n$ 的系统, 设已经施加了线性化反馈, 实现了部分线性化。在此基础上, 还可以再加上下面的外环反馈

$$v_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \cdots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i + \bar{v}_i \quad 1 \leq i \leq m \quad (21-44)$$

在 x 坐标下, 这也就是

$$v_i = -c_0^i h_i(x) - c_1^i L_f h_i(x) - \cdots - c_{r_i-1}^i L_f^{r_i-1} h_i(x) + \bar{v}_i \quad 1 \leq i \leq m_i \quad (21-45)$$

加外环后, 系统方程为

$$\dot{\xi}^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0^i & -c_1^i & -c_2^i & \cdots & -c_{r_i-1}^i \end{bmatrix} \xi^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{v}_i \quad 1 \leq i \leq m \quad (21-46a)$$

$$y_i = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \xi^i \quad 1 \leq i \leq m \quad (21-46b)$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)v \quad (21-46c)$$

式(21-46c)中的 v 也可以以式(21-50)代入。加外环后的输入输出关系是线性的,其传递函数阵是对角阵

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1(s)} & & & \\ & \frac{1}{d_2(s)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_m(s)} \end{bmatrix} \quad (21-47)$$

式中

$$d_i(x) = c_0^i + c_1^i s + \cdots + c_{r_i-1}^i s^{r_i-1} + s^{r_i} \quad 1 \leq i \leq m \quad (21-48)$$

21.6.2 m 入 m 出系统的局部渐近稳定性

上面加大闭环反馈后得到的系统方程式(21-46),如取 $\bar{v}_i = 0, 1 \leq i \leq m$,与单入单出情况下得到的系统方程式(14-12)结构相同。因此,同样可以引用引理 14.3 得到类似的结论。结论是:对取 $\bar{v}_i = 0, 1 \leq i \leq m$ 的系统方程式(21-46),如果系统的零动态特性在 $\eta = 0$ 是渐近稳定的,且多项式(21-48)的特征值都在左半复平面,则系统式(21-46)在 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 是局部渐近稳定的。

21.6.3 小参考输入时的系统稳定性(有界性)

上面的渐近稳定性讨论中,假设参考输入 $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ 为零。如果考虑有非零的参考输入 \bar{v} 的作用,大闭环系统,包括线性化部分和内动态部分,可一般地表示为

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_i(x) \bar{v}_i \quad (21-49)$$

不失一般性,如果 $x^0 = 0$ 是系统的一个渐近稳定平衡点,即 $\tilde{f}(0) = 0, \tilde{h}(0) = 0$,则对于足够小的参考输入 \bar{v} ,如定理 14.5 的单入单出情况所作的一样,可得到结论:系统的轨线是有界的。更准确的说法是:对每个 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 和 $K > 0$,只要

$$\|x^0\| < \delta \quad \text{且} \quad |\bar{v}_i(t)| < K \quad \forall t \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

就有

$$\|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

第 22 章 输入输出维数不等的 多入多出系统

本章讨论输入输出维数不等的多入多出非线性系统的精确线性化问题。22.1 节给出了一般的多入多出系统的相对阶的定义、坐标变换函数集和系统在坐标变换后的正则、准正则形式表示以及反馈线性化控制律,并且给出了状态空间精确线性化问题可解的基本充要条件。22.2 节给出了一般的 $m > p$ 多入多出系统非交互控制问题的定义和问题可解的充要条件。

22.1 输入维数大于输出维数的多入多出系统

22.1.1 一般的多入多出系统相对阶的定义

一般的多入多出的非线性系统的定义,已经在第 20 章中给出,即

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y_i &= h_i(x) \quad i=1, \dots, p\end{aligned}\quad (22-1)$$

一般的多入多出的非线性系统相对阶的定义可参照第 20 章给出,不同的只是 $p \neq m$ 。

定义 22.1 对式(22-1)的一般多入多出非线性系统,设 $p < m$,如果点 $x^0 \in U$ 满足下面两条件,则称系统的(向量)相对阶为 r_1, \dots, r_p 。

(1)对所有 x_0 邻域的 x 和所有 $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq p, 0 \leq k \leq r_i - 1$, 满足

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad (22-2a)$$

(2)在 $x = x^0$ 点,下面的 $p \times m$ 阵的秩等于其行数(即输出通道数)

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} h_p(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p(x^0) \end{bmatrix} \quad (22-2b)$$

对定义所作的说明与定义 20.1 的说明(1)至(6)相同,见第 20 章。说明(7)改为:注意到矩阵可分解为

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1} h_p(x^0) \end{bmatrix} [g_1(x^0) \quad \cdots \quad g_m(x^0)]$$

可见当 $A(x^0)$ 的秩等于行数 p 时,就 $dL_f^{r_1-1} h_1(x^0), \dots, dL_f^{r_p-1} h_p(x^0)$ 来说,它们必须是彼此线性独立的;就 $g_1(x^0), \dots, g_m(x^0)$ 来说,虽然不要求它们彼此都是线性独立的,但要求

至少有 p 个是彼此线性独立的。

22.1.2 基于线性化坐标 $L_f^k h_i(x^0)$ 的坐标变换映射

与引理 20.1 相似,可证明全微分对偶向量场 $dL_f^k h_i(x^0)$, $k=0,1,\dots,r_i-1; i=1,\dots,p$ 是彼此线性独立的。

引理 22.1 设系统在 x^0 有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_p\}$, 则以下共 $\{r_1 + \dots + r_p\}$ 个行向量彼此都是线性独立的。

$$\begin{aligned} & dh_1(x^0), dL_f h_1(x^0), \dots, dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ & \vdots \\ & dh_p(x^0), dL_f h_p(x^0), \dots, dL_f^{r_p-1} h_p(x^0) \end{aligned}$$

相应地有下面的推论。

推论 22.2 $r_1 + \dots + r_p \leq n$ 。

证明 由定理 22.1, $\{r_1 + \dots + r_p\}$ 个全微分对偶行向量彼此都是线性独立的。又知道系统最大可能的线性独立行向量个数是 n 。因此,必有 $r_1 + \dots + r_p \leq n$ 。

相应地得到下面的坐标变换函数集定理。

定理 22.3 设系统在 x^0 有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_p\}$ 。令

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x) &= h_i(x) \\ \phi_2^i(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq p \quad (22-3)$$

如果 $r = r_1 + \dots + r_p$ 严格小于 n , 那么总能再找 $n - r$ 个函数 $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$, 补充后使

$$\phi(x) = [\phi_1^1(x), \dots, \phi_{r_1}^1(x), \dots, \phi_1^p(x), \dots, \phi_{r_p}^p(x), \phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)]^T \quad (22-4)$$

的 Jacobi 阵非奇异, 并因此可视 $\phi(x)$ 为 x^0 邻域一局部坐标变换, 而且所补充的这些函数在 x^0 的值可以任意选择。此外, 如果分布

$$G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

在 x^0 邻域还是对合的, 则总可以找到 $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$, 使对所有 x^0 周围的 x , 满足

$$L_{g_j} \phi_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m \quad (22-5)$$

22.1.3 系统在坐标变换后的正则形式表示

以式(22-4)的 $\phi(x)$ 作为线性化坐标, 令

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^p \end{bmatrix} \quad \xi^i = \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \vdots \\ \xi_{r_i}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^i(x) \\ \phi_2^i(x) \\ \vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (22-6)$$

$$a_{ij}(\xi, \eta) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad 1 \leq j \leq m \quad 1 \leq i \leq p \quad (22-7a)$$

$$b_i(\xi, \eta) = L_f^i h_i(\phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad 1 \leq i \leq p \quad (22-7b)$$

定义在 x^0 邻域上的相对阶为 $\{r_1, \dots, r_p\}$ 的 m 入 p 出系统, 变换后的系统方程, 为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 & 1 \leq i \leq p \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1} &= \xi_{r_i} & 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (22-8a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{r_i} &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j & 1 \leq i \leq p \\ y_i &= \xi_1 & 1 \leq i \leq p \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m p_i(\xi, \eta) u_i = q(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) u \end{aligned} \quad (22-8b)$$

式(22-8a), 式(22-8b)被称为准正则形式。如果分布 $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ 是对合的, 总可以通过选 $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$, 使满足 $P(\xi, \eta) = 0$, 从而有

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) \quad (22-8c)$$

式(22-8a), 式(22-8c)被称为正则形式。

把 $\dot{\xi}_{r_i} = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j$ 写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{r_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_p} \end{bmatrix} = b(\xi, \eta) + A(\xi, \eta) u \quad (22-9)$$

式中

$$b(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} b_1(\xi, \eta) \\ \vdots \\ b_p(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad A(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\xi, \eta) & \cdots & a_{1m}(\xi, \eta) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}(\xi, \eta) & \cdots & a_{pm}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (22-10)$$

式(22-10)中的 $A(\xi, \eta)$, 作坐标转换后, 正是相对阶定义式(22-2b)。

22.1.4 m 入 p 出系统的反馈线性化

一个相对阶 $r \leq n$ 的 m 入 p 出系统, 和 m 入 m 出系统一样, 可通过施加状态反馈实现外部线性化。当 $r = n$ 时, 可实现全状态空间精确线性化。在式(22-9)中, 令右端

$$b(\xi, \eta) + A(\xi, \eta) u = v$$

式中, $v = [v_1 \ \cdots \ v_p]^T$ 。可推得

$$A(\xi, \eta) u = -b(\xi, \eta) + v$$

用 A^{-1} 表示 $p \times m$ 矩阵 A 的广义逆矩阵, 得线性化反馈控制

$$u = A^{-1}(\xi, \eta)(-b(\xi, \eta) + v) \quad (22-11)$$

施加反馈后的 m 入 p 出系统为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 & 1 \leq i \leq p \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1} &= \xi_{r_i} & 1 \leq i \leq p \\ \dot{\xi}_{r_i} &= v_i & 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (22-12a)$$

$$y_i = \xi_i \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m p_i(\xi, \eta) u_i = q(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) u \quad (22-12b)$$

在 x 坐标系下, 控制 u 可表示为

$$u_j = \alpha_j(x) + \sum_{k=1}^p \beta_{jk}(x) v_k \quad 1 \leq j \leq m$$

写成向量形式为

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v \quad (22-13)$$

式中

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix}$$

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \cdots & \beta_{1p}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \cdots & \beta_{mp}(x) \end{bmatrix} = [\beta_1(x) \quad \cdots \quad \beta_p(x)]$$

这里假设矩阵 $\beta(x)$ 对所有 x 非奇异。施加反馈后的 m 入 p 出系统为

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) \alpha_j(x) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p g_j(x) \beta_{jk}(x) v_k \quad (22-14a)$$

$$y_1 = h_1(x)$$

...

$$y_p = h_p(x)$$

$$(22-14b)$$

写成向量形式是

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \quad (21-15a)$$

$$y = h(x) \quad (21-15b)$$

22.1.5 $p < m$ 系统状态空间精确线性化问题可解的基本充要条件

定理 22.4 对于 m 入 p 出系统, 设矩阵 $g(x^0)$ 的秩 $\text{rank}(g(x^0)) = p$, 且此秩对 x^0 附近所有 x 是一常数。状态空间精确线性化问题可解的充要条件是: 存在 x^0 的一邻域 U 和定义在 U 上的 p 个实值函数 $h_1(x), \dots, h_p(x)$, 使系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \quad (22-16a)$$

$$y = h(x) \quad (22-16b)$$

在 x^0 有(向量)相对阶 $\{r_1, \dots, r_p\}$, 且 $r_1 + \dots + r_p = n$ 。

证明 问题的核心是如何找到一个等效的 p 入 p 出系统。如果矩阵 $g(x)$ 有不变的秩 $p < m$, 则总可找到一非奇异矩阵 $\gamma(x)$, 使

$$g(x) \gamma(x) = [g'(x) \quad 0]$$

式中, $g'(x)$ 有 p 列, 且秩为 p 。这样

$$g(x) u = g(x) \gamma(x) \gamma^{-1}(x) u = [g'(x) \quad 0] \gamma^{-1}(x) u$$

如果把反馈预先加以转换, 取

$$u = \gamma(x) \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix}$$

则

$$g(x)u = [g'(x) \quad 0]\gamma^{-1}(x)u = g'(x)u'$$

据此,系统方程可转换为

$$\dot{x} = f(x) + g'(x)u'$$

这是一个 p 出 p 入系统,满足定理 21.1 的假设,定理得证。

22.2 输入维数大于输出维数系统的非交互控制

22.2.1 一般的 $m > p$ 多入多出系统非交互控制问题的定义

仿照定义 21.2 可以给出如下定义。

定义 22.2 给定一非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \\ y_i &= h_i(x) \quad i=1, \dots, p\end{aligned}\quad (22-17)$$

和一初始点 x^0 。寻找定义在 x^0 一邻域 U 上的一个静态反馈控制律

$$u_j = \alpha_j(x) + \sum_{k=1}^m \beta_{jk}(x)v_k \quad 1 \leq j \leq m \quad (22-18)$$

把输入向量 v 剖分为 p 个相互有独立性的集合

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

使在相应的闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)\alpha_j(x) + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m g_j(x)\beta_{jk}(x) \right) v_k \\ y_i &= h_i(x) \quad i=1, \dots, p\end{aligned}\quad (22-19)$$

中,每个通道的输出 $y_i, 1 \leq i \leq p$ 只受对应的输入集合 v_i 影响,而不受其它输入集合 $v_j, j \neq i$ 影响。这被称为 $m > p$ 情况下的非交互控制问题或解耦问题。

22.2.2 一般的 $m > p$ 多入多出系统非交互控制问题可解的充要条件

与定理 21.4 相对应有如下的定理。

定理 22.4 一般的 $m > p$ 多入多出系统非交互控制问题可解的充要条件是:系统在 x^0 一邻域有相对阶 $\{r_1, \dots, r_p\}$,或等价地说是

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq i \leq p \quad k < r_i - 1$$

且矩阵 $A(x^0)$ 的秩为 p 。要求 $A(x^0)$ 的秩为 p ,也就是要求

$$[L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x)] \neq [0 \quad \dots \quad 0] \quad 1 \leq i \leq p \quad (22-20)$$

且各行相互独立。

证明 问题的核心仍是如何找到一个等效的 p 入 p 出系统,得到等效 p 入 p 出系统后,引用定理 21.4 即得证。如果矩阵有不变的秩 $p < m$,则总可找到一非奇异矩阵 $\gamma(x)$ 使

$$g(x)\gamma(x)=[g'(x) \quad 0]$$

式中, $g'(x)$ 有 p 列, 且秩为 p 。这样

$$g(x)u=g(x)\gamma(x)\gamma^{-1}(x)u=[g'(x) \quad 0]\gamma^{-1}(x)u$$

如果把反馈预先加以转换, 取

$$u=\gamma(x)\begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix}$$

则

$$g(x)u=[g'(x) \quad 0]\gamma^{-1}(x)u=g'(x)u'$$

据此, 系统方程可转换为

$$\dot{x}=f(x)+g'(x)u'$$

这是一个 p 出 p 入系统, 满足定理 21.1 的假设, 定理得证。

22.2.3 $m > p$ 系统的解耦控制

如定理 22.4 所指出的 m 入 p 出系统解耦问题有解的充要条件是: 系统有相对阶(一般地要求 $r_1 + \cdots + r_p = n$, 只要求 $r_1 + \cdots + r_p \leq n$)。只就充分性而言, 这一条件与 $r \leq n$ 系统实现外部线性化的条件是相一致的。观察外部线性化结果式(21-12a)可证实, 一个有相对阶的系统, 在实现外部线性化的同时, 已实现了解耦。

由此可知, m 入 p 出系统的解耦控制和外部线性化的反馈控制相同, 其表示式见式(22-11)和式(22-13)。

第 23 章 多入多出非线性系统精确线性化举例

本章给出两个典型多入多出非线性控制系统的应用实例。23.1 节的例子有通用性,它可用于潜艇、水下机器人(水下船舶通称潜器),也可用于各种飞机(空气动力飞机通称飞行器),给出了数学模型和精确线性化结果。23.2 节给出了多机电力系统励磁控制精确线性化的例子,见参考文献[24]。该例采用的精确线性化方法和步骤与参考文献[5],[6]有所不同,但所得结果与[5],[6]完全相同。

23.1 刚体姿态控制(潜器、飞行器姿态控制)

23.1.1 固定坐标系和运动坐标系

假设固定坐标系 $E - \xi\eta\zeta$ 是相对地面保持不动的直角坐标系,运动坐标系 $o - xyz$ 是固定在刚体(包括潜艇、水下机器人等水下船舶和飞机等)上的坐标系,运动坐标系的原点与刚体重心重合。在固定坐标系下,刚体上任一点 p 的位置可以用一个起自原点 E 止于点 p 的位置向量 R' 来表示,点 p 在固定坐标系下的坐标为

$$R' = (\xi \quad \eta \quad \zeta)^T$$

同一点 p 在运动坐标系下的位置用一个起自原点 o 止于点 p 的位置向量 R 来表示,点 p 在运动坐标系下的坐标为

$$R = (x \quad y \quad z)^T$$

因为只研究刚体的姿态运动,为简单,假设固定坐标系原点 E 与运动坐标系原点 o 相互重合。这时位置向量 R' 和 R 的关系,即点 p 的两种坐标表示之间的关系为

$$R' = SR \quad (23-1)$$

式中, S 是一个正交变换阵,满足正交关系 $S^T S = I$ 。此正交关系也可展开写为

$$\sum_{k=1}^3 S_{ik} S_{jk} = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (23-2)$$

刚体角速度用其轴向量(方向取右手系)表示。在固定坐标系下被表示为 $\Omega' = (\Omega_\xi \quad \Omega_\eta \quad \Omega_\zeta)^T$,在运动坐标系下被表示为 $\Omega = [p \quad q \quad r]^T$ 。任意点 p 因刚体角速度而引起的线速度为

$$\dot{R}' = \Omega' \times R' \quad (23-3a)$$

$$\dot{R} = \Omega \times R \quad (23-3b)$$

为便于矩阵运算,把叉乘用斜对称阵表示

$$\dot{R}' = \Omega' \times R' = -W(\Omega')R' \quad (23-4a)$$

式中

$$W(\Omega') = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_\zeta & -\Omega_\eta \\ -\Omega_\zeta & 0 & \Omega_\xi \\ \Omega_\eta & -\Omega_\xi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R} = \Omega \times R = -W(\Omega)R \quad (23-4b)$$

式中

$$W(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

把式(23-4a)左乘 S^T , 得到变换关系

$$S^T W(\Omega') R' = -S^T (\Omega' \times R') = -S^T \Omega' \times S^T R' = -\Omega \times R = W(\Omega)R \quad (23-5)$$

23.1.2 坐标变换式 S 分解为三次旋转

设由固定坐标系轴位置出发, 经绕三个适当的轴依次分别转动 $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \varphi$ (以右手系为转角正方向) 后到达运动坐标系轴位置。各次旋转对应的变换阵分别为 $S_1(\psi)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\varphi)$, 则有

$$S^T = S_3(\varphi) S_2(\theta) S_1(\psi) \quad (23-6)$$

式中

$$S_1(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23-7a)$$

$$S_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (23-7b)$$

$$S_3(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (23-7c)$$

注意到

$$S_1(\psi) = e^{A_1 \psi} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23-8a)$$

$$S_2(\theta) = e^{A_2 \theta} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23-8b)$$

$$S_3(\varphi) = e^{A_3 \varphi} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23-8c)$$

$$S^T = S^T(\varphi, \theta, \psi) = e^{A_3 \varphi} e^{A_2 \theta} e^{A_1 \psi} \quad (23-9)$$

得

并且可求得

$$\left. \frac{\partial S^T}{\partial \varphi} \right|_{(\varphi, \theta, \psi)=0} = A_3 \quad \left. \frac{\partial S^T}{\partial \theta} \right|_{(\varphi, \theta, \psi)=0} = A_2 \quad \left. \frac{\partial S^T}{\partial \psi} \right|_{(\varphi, \theta, \psi)=0} = A_1 \quad (23-10)$$

$$S^T|_{(\varphi, \theta, \psi)=0} = I \quad (23-11)$$

因为变换阵 S 在 $(\varphi, \theta, \psi)=0$, 即 $S=I$ 邻域的秩为 3, 所以 S 局部的逆阵存在。

23.1.3 以坐标变换阵表示的姿态运动学方程

把式(23-1)写为

$$R = S^T R^s$$

刚体在运动时, R^s, S 将随时间变化, 但刚体上的点在运动坐标系下的坐标 R 不会随时间变化。上式两端对时间 t 求导数, 并注意到式(23-5), 得

$$0 = \dot{S}^T R^s + S^T \dot{R}^s = \dot{S}^T S R - S^T W(\Omega) R^s = \dot{S}^T S R - W(\Omega) R = (\dot{S}^T S - W(\Omega)) R \quad (23-12)$$

由点 p 的任意性, 一般 $R \neq 0$, 于是得

$$\dot{S}^T = W(\Omega) S^T \quad (23-13)$$

此式表示坐标变换阵 S 随刚体旋转运动的变化关系, 被称为以坐标变换阵表示的姿态运动学方程。注意这是一个矩阵微分方程, S 是矩阵, 不是向量。

23.1.4 以三个轴角速度表示的姿态运动学方程

把式(23-9)代入, 左端成为

$$\begin{aligned} \dot{S}^T &= \frac{d}{dt} e^{A_3 \varphi} e^{A_2 \theta} e^{A_1 \psi} \\ &= \dot{\varphi} A_3 S^T + e^{A_3 \varphi} \dot{\theta} A_2 e^{A_2 \theta} e^{A_1 \psi} + e^{A_3 \varphi} e^{A_2 \theta} \dot{\psi} A_1 e^{A_1 \psi} \\ &= (\dot{\varphi} A_3 + e^{A_3 \varphi} \dot{\theta} A_2 e^{-A_3 \varphi} + e^{A_3 \varphi} e^{A_2 \theta} \dot{\psi} A_1 e^{-A_2 \theta} e^{-A_3 \varphi}) S^T \end{aligned} \quad (23-14)$$

与式(23-13)比较得

$$\dot{\varphi} A_3 + \dot{\theta} e^{A_3 \varphi} A_2 e^{-A_3 \varphi} + \dot{\psi} e^{A_3 \varphi} e^{A_2 \theta} A_1 e^{-A_2 \theta} e^{-A_3 \varphi} = W(\Omega)$$

注意到

$$\begin{aligned} e^{A_3 \varphi} A_2 e^{-A_3 \varphi} &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e^{A_3 \varphi} e^{A_2 \theta} A_1 e^{-A_2 \theta} e^{-A_3 \varphi} &= \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi & 0 & -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

都是斜对称阵, 注意到式(23-4b), 代入后得

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi & 0 & -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

使矩阵元素对应相等得

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (23-15)$$

其反变换是

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi \tan\theta & \cos\varphi \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (23-16)$$

式(23-15), 式(23-16)被称为以三个轴角速度表示的姿态运动学方程。令 $\Lambda = (\varphi \ \theta \ \psi)^T$, 式(23-16)还可以写成向量形式

$$\dot{\Lambda} = M(\Lambda)\Omega \quad (23-17)$$

式中, 姿态矩阵

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi \tan\theta & \cos\varphi \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{bmatrix}$$

23.1.5 转矩平衡方程

刚体的动量矩在固定坐标系下记为 $H^F(t)$, 在运动坐标下记为 $H(t)$, 并且

$$H(t) = J\Omega(t) \quad (23-18)$$

式中, J 为刚体的惯量阵。在固定坐标系下使用动量矩定理: 刚体对原点的动量矩的变化率等于该瞬时其所受外力的合力对原点的矩。用 $T^F(t)$ 表示总外力矩, 则有

$$\dot{H}^F(t) = T^F(t)$$

对式(23-18)求导得

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} = \dot{H} &= \frac{d}{dt}(S^T H^F) = \dot{S}^T \dot{H}^F + S^T \dot{H}^F = W(\Omega)S^T H^F + S^T T^F \\ &= W(\Omega)H + T = W(\Omega)J\Omega + T \end{aligned}$$

或更明确地写为

$$J\dot{\Omega}(t) = W(\Omega(t))J\Omega(t) + T(t) \quad (23-19)$$

这就是刚体转矩平衡方程或姿态运动的动力学方程。外力矩最多由 3 对独立推力器完成, 即

$$T = B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3 = Bu$$

式中, $u_1, u_2, u_3 \in R$ 是彼此独立的控制力矩; $B_1, B_2, B_3 \in R^3$ 是彼此线性独立的方向余弦向量。

23.1.6 系统方程和相对阶

式(23-19)的动力学方程、式(23-17)的姿态运动学方程和所选择的输出方程一起构成 3 入 3 出系统方程

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} &= W(\Omega)J\Omega + Bu \\ \dot{\Lambda} &= M(\Lambda)\Omega \\ y &= \Lambda \end{aligned} \quad (23-20)$$

为求相对阶, 对输出 y 求导, 直到控制 u 明确出现为止。

$$y^{(1)} = \dot{\Lambda} = M(\Lambda)\Omega$$

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \left(\frac{dM(\Lambda)}{d\Lambda^T} \dot{\Lambda} \right) \Omega + M(\Lambda)\dot{\Omega} \\ &= \left(\frac{dM(\Lambda)}{d\Lambda^T} \dot{\Lambda} \right) \Omega + M(\Lambda)J^{-1}W(\Omega)J\Omega + M(\Lambda)J^{-1}Bu \end{aligned}$$

因为 $y^{(2)}$ 的三个分量中 u 都已明确出现,故对应三个输出的相对阶为 $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ 和

$$r = r_1 + r_2 + r_3 = 6$$

23.1.6 精确线性化

因相对阶 $r = r_1 + r_2 + r_3 = n = 6$,已满足精确线性化的充要条件和解耦控制的充要条件,所以可实现完全线性化。取坐标变换

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^T = \Lambda = (\varphi \quad \theta \quad \psi)^T \\ \xi_2 &= (z_4 \quad z_5 \quad z_6)^T = \dot{\Lambda} = (\dot{\varphi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi})^T\end{aligned}$$

变换后的方程为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \ddot{\Lambda} = \left(\frac{dM(\Lambda)}{d\Lambda^T} \dot{\Lambda} \right) \Omega + M(\Lambda) J^{-1} W(\Omega) J \Omega + M(\Lambda) J^{-1} B u \\ &= b(\varphi, \theta, \psi, p, q, r) + A(\varphi, \theta, \psi) u\end{aligned}\quad (23-21)$$

因为 $A(\varphi, \theta, \psi)$ 在 $(\varphi \quad \theta \quad \psi)^T = 0$ 满秩,有逆存在,得到可实现线性化的反馈控制

$$u = A^{-1}(\varphi, \theta, \psi)(v - b(\varphi, \theta, \psi, p, q, r))\quad (23-22)$$

最后得解耦线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= v\end{aligned}$$

23.2 多机电力系统励磁控制精确线性化

23.2.1 系统方程

多机系统的数学模型可按参考文献[5],[6]给出的形式,对 $i = 1, \dots, n$, 写为

$$\begin{aligned}\dot{E}'_{qi} &= -\frac{1}{T_{d0i}} E'_{qi} + \frac{1}{T_{d0i}} V_{fi} = -\frac{1}{T_{d0i}} (E'_{qi} + I_{di} (x_{di} - x'_{di})) + \frac{1}{T_{d0i}} V_{fi} \\ \dot{\omega} &= -\frac{\omega_0}{H_i} P_{ei} - \frac{D_i}{H_i} (\omega_i - \omega_0) + \frac{\omega_0}{H_i} P_{mi} \\ \dot{\delta}_i &= \omega_i - \omega_0\end{aligned}\quad (23-23)$$

式中 I_{di} ——节点 i 发电机 d 轴电流。

$$I_{di} = E'_{qi} B_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} E'_{qj} \cos(\delta_{ij} - \alpha_{ij})\quad (23-24)$$

式中 P_{ei} ——节点 i 发电机输出有功功率。

$$P_{ei} = G_{ii} E'^2_{qi} + E'_{qi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} E'_{qj} \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij})\quad (23-25)$$

式中 E'_{qi} ——节点 i 发电机 q 轴暂态电势;

ω_i, ω_0 ——节点 i 发电机转子电角速度和同步电角速度;

$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$ ——节点 i 和节点 j 发电机转子运行角差值(电弧度);

P_{mi} ——发电机输入机械功率;

H_i, D_i ——节点 i 机组的转动惯量和阻尼系数;

x_{di} ——节点 i 发电机同步电抗;

x'_{di} ——节点 i 发电机暂态电抗;

T_{d0i} ——节点 i 发电机励磁绕组时间常数;

V_{fi} ——节点 i 发电机的励磁电压;

G_{ii}, B_{ii} ——节点 i 的自电导和自电纳;

Y_{ij} ——节点 i, j 间互导纳;

$\alpha_{ij} = 90 - \phi_{ij}$ ——阻抗角 ϕ_{ij} 的余角。

把式(23-24)、式(23-25)代入式(23-23),经整理后可给出仿射形式的状态模型

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x) u_i = f(x) + G(x) u \quad (23-26)$$

式中

$$G(x) = [g_1 \quad \cdots \quad g_n] = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d01}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{T_{d0n}} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{d01}}(E'_{q1} + I_{d1}(x_{d1} - x'_{d1})) \\ \vdots \\ -\frac{1}{T_{d0n}}(E'_{qn} + I_{dn}(x_{dn} - x'_{dn})) \\ -\frac{\omega_0}{H_1}P_{e1} - \frac{D_1}{H_1}(\omega_1 - \omega_0) + \frac{\omega_0}{H_1}P_{m1} \\ \vdots \\ -\frac{\omega_0}{H_n}P_{en} - \frac{D_n}{H_n}(\omega_n - \omega_0) + \frac{\omega_0}{H_n}P_{mn} \\ \omega_1 - \omega_0 \\ \vdots \\ \omega_n - \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -\frac{1+(x_{d1}-x'_{d1})B_{11}}{T_{d01}}E'_{q1} + \frac{x_{d1}-x'_{d1}}{T_{d01}}\sum_{j=2}^n Y_{1j}E'_{qj}\cos(\delta_{1j}-\alpha_{1j}) \\ \vdots \\ -\frac{1+(x_{dn}-x'_{dn})B_{nn}}{T_{d0n}}E'_{qn} + \frac{x_{dn}-x'_{dn}}{T_{d01}}\sum_{j=1}^{n-1} Y_{nj}E'_{qj}\cos(\delta_{nj}-\alpha_{nj}) \\ -\frac{\omega_0}{H_1}(G_{11}E'^2_{q1} + E'_{q1}\sum_{j=2}^n Y_{1j}E'_{qj}\sin(\delta_{1j}-\alpha_{1j}) - \frac{D_1}{H_1}(\omega_1-\omega_0) + \frac{\omega_0}{H_1} \\ -\frac{\omega_0}{H_n}(G_{nn}E'^2_{qn} + E'_{qn}\sum_{j=1}^{n-1} Y_{nj}E'_{qj}\sin(\delta_{nj}-\alpha_{nj}) - \frac{D_n}{H_n}(\omega_n-\omega_0) + \frac{\omega_0}{H_n} \\ \omega_1-\omega_0 \\ \vdots \\ \omega_n-\omega_0 \end{bmatrix} \\
& x = \begin{bmatrix} E'_{q1} \\ \vdots \\ E'_{qn} \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

可见此系统是一个多人多出(n 入 n 出)系统。此系统的精确线性化问题要实现的目标是使系统变换为一个完全可控的线性系统

$$\dot{z}_i = z_{n+i} \quad \dot{z}_{n+i} = z_{2n+i} \quad \dot{z}_{2n+i} = v_i \quad i=1, \dots, n$$

下面针对式(23-26)的状态方程解精确线性化问题。注意系统的状态空间维数为 $3n$ ，输入空间维数为 n 。可划分为五个阶段，分别对应 23.2.2 至 23.2.6。下面开始逐段进行。

23.2.2 检验精确线性化问题可解的充要条件

23.2.2.1 分布集 G_0 的计算

为验证定理 21.2 的三条件，首先计算分布集 G_0 ，有

$$\begin{aligned}
G_0 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_n\} \\
&= \text{span}\left\{\left[\frac{1}{T_{d01}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\right]^T, \dots, \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{1}{T_{d0n}} \quad 0 \quad \dots \quad 0\right]^T\right\}
\end{aligned}$$

可见，第一， G_0 维数等于 n ，保持不变；第二，因 $[g_i, g_j] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n$ ，所以 G_0 对合。 G_0 满足定理 21.2 条件。

23.2.2.2 分布集 G_1, G_2 的计算

下面计算 G_1 。

$$G_1 = \text{span}\{g_1, \dots, g_n, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_n\}$$

注意到，对 $i=1, \dots, n$ 可算得

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g_i(x) &= \frac{\partial g_i}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} g_i = - \frac{\partial f}{\partial x^T} g_i \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{x_{d1} - x'_{d1}}{T_{d0i} T_{d01}} Y_{1i} \cos(\delta_{1i} - \alpha_{1i}) \\ \vdots \\ \frac{1 + (x_{di} - x'_{di}) B_{ii}}{T_{d0i}^2} \\ \vdots \\ -\frac{x_{dn} - x'_{dn}}{T_{d0i} T_{d0n}} Y_{ni} \cos(\delta_{ni} - \alpha_{ni}) \\ \frac{\omega_0}{T_{d0i} H_1} E'_{q1} Y_{1i} \sin(\delta_{1i} - \alpha_{1i}) \\ \vdots \\ \frac{\omega_0}{T_{d0i} H_i} \left[2G_{ii} E'_{qi} + \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E'_{qj} \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) \right] \\ \vdots \\ \frac{\omega_0}{T_{d0i} H_n} E'_{qn} Y_{ni} \sin(\delta_{ni} - \alpha_{ni}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见,第一, G_1 维数等于 $2n$, 保持不变;第二, 因经计算李括号 $[g_i, g_j] = 0, [g_i, \text{ad}_f g_j] = 0, [\text{ad}_f g_i, \text{ad}_f g_j] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n$, 所以 G_1 对合。 G_1 满足定理 21.2 条件。

23.2.2.3 分布集 G_2 的计算

下面计算 G_2 。

$$G_2 = \text{span}\{g_1, \dots, g_n, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_n, \text{ad}_f^2 g_1, \dots, \text{ad}_f^2 g_n\}$$

注意到对 $i = 1, \dots, n$ 可算得(为节省篇幅,下式中未给出具体结果,以符号 L 表示)

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^2 g_i(x) &= \frac{\partial(\text{ad}_f g_i)}{\partial x^T} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x^T} \text{ad}_f g_i(x) \\ &= [L_{1i} \quad \dots \quad L_{ni} L_{(n+1)i} \quad \dots \quad L_{(2n)i} L_{(2n+1)i} \quad \dots \quad L_{(3n)i}]^T \end{aligned}$$

可见:第一, G_2 维数等于 $3n$, 保持不变;第二, 因 G_2 已达最高维, 所以 G_2 对合。 G_2 满足定理 21.2 三条件。以下关于 G_3 至 G_{n-1} 的计算可省略, 必有 $G_3 = \dots = G_{n-1} = G_2$ 。

因满足定理 21.2 的充要条件, 得到结论: 多人多出电力系统励磁问题的状态空间精确线性化问题可解。得到这一结果后, 可以继续进行以下的计算。

23.2.3 求输出函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ 使相对阶 $r = 3n$

因为 $\dim(G_0) = n, \dim(G_1) = 2n, \dim(G_2) = 3n$, 求解按以下步骤进行。

第一步, 按 G_1 求出共 $3n - 2n = n$ 个输出函数, 使 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ 满足

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^T} [g_i(x) \quad \text{ad}_f g_i(x)] = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

...

(23-27)

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial x^T} [g_i(x) \quad \text{ad}_f g_i(x)] = 0 \quad i=1, \dots, n$$

这是一组关于 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ 的偏微分方程。因为 $g_i(x), \text{ad}_f g_i(x)$ 中含有一些零值分量, 使这个偏微分方程很容易解, 所以不必如参考文献[5], [6]那样特别采用回避直接求解偏微分方程的解法。下面采用直接求解方法, 更加直接明了。通过观察得解

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \delta_1 - \delta_0 \\ &\vdots \\ \lambda_n(x) &= \delta_n - \delta_0 \end{aligned} \quad (23-28)$$

第二步, 如果所得到的输出函数个数不足 n , 则按 G_0 求其余的输出函数。因为这里已经等于 n , 不必再继续。

下面的工作是验证所找到的输出函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$, 保证相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 存在。按相对阶定义, 这要求它们满足下面两个条件

$$L_{g_j} L_f^k \lambda_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq m \quad k < r_i - 1 \quad \text{对所有 } x^0 \text{ 邻域的 } x$$

$$A(x^0) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_1(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_n-1} \lambda_n(x^0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_n(x^0) \end{bmatrix} \quad \text{满秩}$$

并验证 $r = r_1 + \dots + r_n = n$ 。结果得到

$$L_{g_j} \lambda_i(x) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^T} g_j(x) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$L_f \lambda_i(x) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^T} f(x) = \omega_i - \omega_0$$

$$L_{g_j} L_f \lambda_i(x) = \frac{\partial L_f \lambda_i}{\partial x^T} g_j(x) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (23-29)$$

$$L_f^2 \lambda_i(x) = \frac{\partial L_f \lambda_i}{\partial x^T} f(x) = f_{n+i}(x) = -\frac{\omega_0}{H_i} P_{ei} - \frac{D_i}{H_i} (\omega_i - \omega_0) + \frac{\omega_0}{H_i} P_{mi}$$

$$L_{g_j} L_f^2 \lambda_i(x) = \frac{\partial L_f^2 \lambda_i}{\partial x^T} g_j(x) = -\frac{\omega_0}{T_{0j} H_i} \frac{\partial P_{ei}}{\partial E'_{qi}} \neq 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

按相对阶定义可见, 对各输出, 相对阶 $r_1 = \dots = r_n = 3, r_1 + r_2 + \dots + r_n = 3n$ 。再来检查矩阵 $A(x)$ 是否满秩。

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_n-1} \lambda_n(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_0}{T_{01} H_1} \frac{\partial P_{e1}}{\partial E'_{q1}} & \cdots & -\frac{\omega_0}{T_{0n} H_1} \frac{\partial P_{e1}}{\partial E'_{qn}} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\omega_0}{T_{01} H_n} \frac{\partial P_{en}}{\partial E'_{q1}} & \cdots & -\frac{\omega_0}{T_{0n} H_n} \frac{\partial P_{en}}{\partial E'_{qn}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\omega_0}{H_1 T_{d01}} 2G_{11} E'_{q1} & -\frac{\omega_0}{H_1 T_{d02}} Y_{12} \sin(\delta_{12} - \alpha_{12}) \cdots & -\frac{\omega_0}{H_1 T_{d0n}} Y_{1n} \sin(\delta_{1n} - \alpha_{1n}) \\ -\frac{\omega_0}{H_2 T_{d01}} Y_{21} \sin(\delta_{21} - \alpha_{21}) & -\frac{\omega_0}{H_2 T_{d02}} 2G_{22} E'_{q2} & \cdots & -\frac{\omega_0}{H_2 T_{d0n}} Y_{2n} \sin(\delta_{2n} - \alpha_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{\omega_0}{H_n T_{d01}} Y_{n1} \sin(\delta_{n1} - \alpha_{n1}) & -\frac{\omega_0}{H_n T_{d02}} Y_{n2} \sin(\delta_{n2} - \alpha_{n2}) \cdots & & -\frac{\omega_0}{H_n T_{d0n}} 2G_{nn} E'_{qn} \end{bmatrix} \quad (23-30)$$

可见 $A(x)$ 满秩, 其秩为 n 。

23.2.4 坐标变换函数

在求得输出函数 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ 之后, 坐标变换 $z = \phi(x)$ 依下式构成

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1^1(x) = \lambda_1(x) = \delta_1 - \delta_{10} \\ &\vdots \\ z_n &= \phi_1^n(x) = \lambda_n(x) = \delta_n - \delta_{n0} \\ z_{n+1} &= \phi_2^1(x) = L_f \lambda_1(x) = \omega_1 - \omega_{10} \\ &\vdots \\ z_{2n} &= \phi_2^n(x) = L_f \lambda_n(x) = \omega_n - \omega_{n0} \\ z_{2n+1} &= \phi_3^1(x) = L_f^2 \lambda_1(x) = f_{n+1}(x) \\ &\vdots \\ z_{3n} &= \phi_3^n(x) = L_f^2 \lambda_n(x) = f_{2n}(x) \end{aligned} \quad (23-31)$$

23.2.5 坐标变换后的系统

变换后的系统方程

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_{n+1} \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= z_{2n} \\ \dot{z}_{n+1} &= z_{2n+1} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{2n} &= z_{3n} \\ \dot{z}_{2n+1} &= \frac{\partial L_f^2 \lambda_1}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial L_f^2 \lambda_1}{\partial x^T} \left[f(x) + \sum_{j=1}^n g_j(x) u_j \right] = L_f^3 \lambda_1(x) + \sum_{j=1}^n L_{g_j} L_f^2 \lambda_1(x) u_j \\ &\vdots \\ \dot{z}_{3n} &= \frac{\partial L_f^2 \lambda_n}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial L_f^2 \lambda_n}{\partial x^T} \left[f(x) + \sum_{j=1}^n g_j(x) u_j \right] = L_f^3 \lambda_n(x) + \sum_{j=1}^n L_{g_j} L_f^2 \lambda_n(x) u_j \end{aligned} \quad (23-32)$$

其后 n 行可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{2n+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^3 \lambda_1(x) \\ \vdots \\ L_f^3 \lambda_n(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 \lambda_1(x) & \cdots & L_{g_n} L_f^2 \lambda_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^2 \lambda_n(x) & \cdots & L_{g_n} L_f^2 \lambda_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = b(x) + A(x)u$$

下面是 $b(x)$ 的计算式

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_{f\lambda_1}^3(x) \\ \vdots \\ L_{f\lambda_n}^3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_0}{H_1} \left(\frac{\partial P_{e1}}{\partial E'_{q1}} f_1 + \cdots + \frac{\partial P_{e1}}{\partial E'_{qn}} f_n \right) - \frac{D_1}{H_1} \dot{\omega}_1 - \frac{\omega_0}{H_1} \left(\frac{\partial P_{e1}}{\partial \delta_1} \dot{\delta}_1 + \cdots + \frac{\partial P_{e1}}{\partial \delta_n} \dot{\delta}_n \right) \\ \vdots \\ -\frac{\omega_0}{H_n} \left(\frac{\partial P_{en}}{\partial E'_{q1}} f_1 + \cdots + \frac{\partial P_{en}}{\partial E'_{qn}} f_n \right) - \frac{D_n}{H_n} \dot{\omega}_n - \frac{\omega_0}{H_n} \left(\frac{\partial P_{en}}{\partial \delta_1} \dot{\delta}_1 + \cdots + \frac{\partial P_{en}}{\partial \delta_n} \dot{\delta}_n \right) \end{bmatrix} \quad (23-33)$$

23.2.6 为精确线性化应加的状态反馈

令

$$v = b(x) + A(x)u \quad (23-34)$$

可知采用状态反馈控制

$$u = A^{-1}(x)(-b(x) + v) \quad (23-35)$$

可实现精确线性化。精确线性化的最终结果是 Brunovsky 标准型

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{n+i} \\ \dot{z}_{n+i} &= z_{2n+i} \quad i=1, \cdots, n \\ \dot{z}_{2n+i} &= v_i \end{aligned} \quad (23-36)$$

第 24 章 通过动态扩充改变相对阶

本章讨论通过动态扩充改变相对阶的方法。相对阶的改变必须借助于动态状态反馈。24.1 节给出动态反馈的一般形式。24.2 节介绍实现动态扩充的一种算法。24.3 节讨论阶段分解定理。24.4 节至 24.5 节是两个用动态扩充算法获得相对阶的实例。24.4 节的飞行器与 23.1 节的飞行器的区别是本节还应用了风轴坐标系而不只是用飞行器体坐标系,便于考虑飞行器所在环境气流运动的影响。24.5 节的例子是与驱动器间有弹性耦合的多杆件机械手,多杆件机械手问题几乎无例外地要依赖动态扩充才能得到相对阶。

24.1 动态反馈控制

24.1.1 动态反馈可以改变相对阶

因为相对阶对于系统的精确线性化、控制解耦、渐近跟踪参考模型输出、高增益输出反馈稳定、能控性等许多方面至关重要,所以使不存在相对阶的系统获得相对阶,和使相对阶按要求改变有重要意义。在 11.2 节和 12.1 节曾得到过在坐标变换和静态状态反馈下相对阶保持不变的结论,因此,得到相对阶和改变相对阶的可能途径只有采用动态状态反馈。动态反馈的概念见定义 15.3。动态状态反馈能把没有相对阶的系统变换为有相对阶的新系统,能使相对阶增加或降低。下面先看一个例子。

例 24.1 (动态反馈改变相对阶)考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ \lambda x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1$$

$$y_2 = h_2(x) = x_2$$

首先求相对阶。计算矩阵 $A(x)$ 的各元素

$$L_{g_1} h_1(x) = \frac{\partial x_1}{\partial x^T} g_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (24-1a)$$

$$L_{g_2} h_1(x) = \frac{\partial x_1}{\partial x^T} g_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (24-1b)$$

$$L_{g_1} h_2(x) = \frac{\partial x_2}{\partial x^T} g_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \quad (24-1c)$$

$$L_{g_2} h_2(x) = \frac{\partial x_2}{\partial x^T} g_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (24-1d)$$

于是得

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1(x) & L_{g_2} h_1(x) \\ L_{g_1} h_2(x) & L_{g_2} h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

可见,使 $L_{g_i} L_f^k h_1 \neq 0$ 的 $k=0$, 可能的相对阶 $r_1=1$; 使 $L_{g_i} L_f^k h_2 \neq 0$ 的 $k=0$, 可能的相对阶 $r_2=1$ 。但是因为 $A(x)$ 不满秩, 所以向量相对阶无定义。

其次, 引进新动力学系统。因为使矩阵 $A(x^0)$ 满秩和改变相对阶不能指望静态状态反馈, 所以下面采用动态扩充方法。今设想使输入 u_1 先经过一个积分器, 即

$$\begin{aligned} u_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= v_1 \end{aligned} \quad (24-2)$$

而输入 u_2 不串积分器, 即

$$u_2 = v_2 \quad (24-3)$$

加串积分器的直接目的是, 使上面的 $A(x)$ 阵中的元素 A_{11} 和 A_{21} 在 $k=0$ 时取零值。因为增加了一个新状态 ζ , 新动力学系统的状态是

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix}$$

新的系统方程是

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) + g_1(x)\zeta + g_2(x)v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) + g_1(x)\zeta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} g_2(x) \\ 0 \end{bmatrix} v_2 \\ &= \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}_1(\tilde{x})v_1 + \tilde{g}_2(\tilde{x})v_2 \end{aligned}$$

$$y = h(x)$$

式中

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 + \zeta \\ x_4 + x_3 \zeta \\ \lambda x_3 + x_4 + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{g}_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{g}_2(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后, 再次计算相对阶。对输出 h_1 , 由 $k=0$ 算起, 有

$$L_{\tilde{g}_1} h_1(x) = \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \tilde{g}_1 = 0$$

$$L_{\tilde{g}_2} h_1(x) = \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_2 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \tilde{g}_2 = 0$$

因皆为零,进一步计算,对 $k=1$,有

$$\begin{aligned} L_{\tilde{f}} h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{f} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \tilde{f} = \zeta \\ L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_1(x) &= \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \tilde{g}_1 = 1 \\ L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_1(x) &= \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \tilde{g}_2 = 0 \end{aligned}$$

结果不全为零,得可能的相对阶 $r_1=2$ 。对输出 h_2 ,由 $k=0$ 算起,有

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}_1} h_2(x) &= \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \tilde{g}_1 = 0 \\ L_{\tilde{g}_2} h_2(x) &= \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \tilde{g}_2 = 0 \end{aligned}$$

因皆为零,进一步计算,对 $k=1$,有

$$\begin{aligned} L_{\tilde{f}} h_2(x) &= \frac{\partial h_2}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{f} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \tilde{f} = x_4 + x_3 \zeta \\ L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_2(x) &= \frac{\partial (x_4 + x_3 \zeta)}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_1 = (0 \ 0 \ \zeta \ 1 \ x_3) \tilde{g}_1 = x_3 \\ L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_2(x) &= \frac{\partial (x_4 + x_3 \zeta)}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}_2 = (0 \ 0 \ \zeta \ 1 \ x_3) \tilde{g}_2 = 1 \end{aligned}$$

结果不全为零,得可能的相对阶 $r_1=2$ 。按相对阶定义,矩阵

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

满秩,向量相对阶 $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$,而且 $r_1 + r_2 = n = 4$ 。上面的计算表明,动态反馈可以使原来相对阶无定义的系统,变成相对阶有定义,且 $r_1 + r_2 = n = 4$ 的系统。

24.1.2 动态反馈的一般形式

上例中的动态反馈是

$$\begin{aligned} u_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= v_1 \\ u_2 &= v_2 \end{aligned}$$

这只是一个特殊形式,动态反馈的一般形式可写为

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x, \zeta) + \beta(x, \zeta)v \\ \dot{\zeta} &= \gamma(x, \zeta) + \delta(x, \zeta)v \end{aligned} \tag{24-4}$$

24.2 动态扩充算法

24.2.1 基本假设及约定记号

假设所讨论系统是 m 入 m 出系统。

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (24-5a)$$

$$y_1 = h_1(x)$$

$$\vdots$$

$$y_m = h_m(x)$$

$$(24-5b)$$

假设在点 x^0 邻域 U 上矩阵

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

的秩不变。因为要讨论的是系统通过动力学扩充而获得相对阶的问题,所以在以上基本假设之外不必假设系统有相对阶 $\{r_1, \dots, r_n\}$ 和矩阵 $A(x^0)$ 非奇异。此外,约定:(1)设记号 r_i 是满足下式的最大整数

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad \forall k < r_i - 1 \quad \forall 1 \leq j \leq m, \text{ 对 } x^0 \text{ 邻域 } U \text{ 所有 } x$$

(2)用记号 $a_i(x)$, $1 \leq i \leq m$ 表示矩阵 $A(x^0)$ 的第 1 至第 m 行。(3)把 $A(x)$ 阵的行号重新加以排列,把线性独立的各行排在前面。设前 $p-1$ 行是线性独立的,其它各行,比如第 p 行可用前 $p-1$ 行线性表示,即在 x^0 邻域可找到定义在 x^0 邻域 U 的不全为零的 $p-1$ 个光滑函数 $c_1(x), \dots, c_{p-1}(x)$, 使

$$a_p(x) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i(x) a_i(x)$$

(4)设在前 $p-1$ 行的某一行中,选取不为零元素。设其行号(输出通道号)为 i_0 , 列号(输入通道号)为 j_0 , 即

$$a_{i_0 j_0}(x^0) = L_{g_{j_0}} L_f^{r_{i_0}-1} h_{i_0}(x^0) \neq 0 \quad (24-6)$$

24.2.2 建立外动态系统

针对 j_0 输入通道建立外动态系统,设外动态系统的状态变量(标量)为 ζ 。记外动态系统的输入为 v_{j_0} 。为统一,把 j_0 输入通道以外的原系统输入 u_j 也都用 v_j 替换。这样,外动态系统可定义为

$$\begin{aligned} u_j &= v_j \quad \forall j \neq j_0 \\ u_{j_0} &= \frac{1}{a_{i_0 j_0}(x)} (p(x) + q(x)\zeta - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m a_{i_0 j}(x) v_j) \\ \dot{\zeta} &= v_{j_0} \end{aligned} \quad (24-7)$$

式中, $p(x)$ 和 $q(x)$ 是待选的用于简化表达式的函数,要求满足 $p(x^0) = 0$ 和 $q(x^0) = 1$ 。

另外,在式(24-7)中,如果把 v_j 恢复为 u_j , 并把 u_{j_0} 移到等号右方, 并入 \sum 内, 可得

$$0 = p(x) + q(x)\zeta - \sum_{j=1}^m a_{i_0 j}(x) u_j \quad (24-8)$$

故 ζ 可用 $p(x), q(x)$ 表示为

$$\zeta = \frac{1}{q(x)} \left(\sum_{j=1}^m a_{i_0 j} u_j - p(x) \right) = \frac{1}{q(x)} (a_{i_0}(x)u - p(x)) \quad (24-9)$$

24.2.3 合成后的新系统

把原系统和外动态系统式(24-7)合在一起得新系统

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m g_j(x) v_j + \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} (p(x) + q(x)\zeta - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m a_{i_0 j}(x) v_j) \\ \dot{\zeta} &= v_{j_0} \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \quad (24-10)$$

因为 $p(x^0)=0$, 所得新系统的平衡点是 $(x \quad \zeta) = (x^0 \quad 0)$ 。

24.2.4 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的选择

首先求新系统的相对阶。求 y_{i_0} 对时间的导数

$$\begin{aligned} y_{i_0} &= h_{i_0}(x) \\ y_{i_0}^{(1)} &= \frac{\partial h_{i_0}(x)}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial h_{i_0}(x)}{\partial x^T} [f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j] \\ &= L_f h_{i_0}(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} h_{i_0}(x) u_j = L_f h_{i_0}(x) \\ y_{i_0}^{(2)} &= \frac{\partial L_f h_{i_0}(x)}{\partial x^T} \dot{x} = L_f^2 h_{i_0}(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f h_{i_0}(x) u_j = L_f^2 h_{i_0}(x) \\ &\vdots \\ y_{i_0}^{(r_{i_0})} &= \frac{\partial L_f^{r_{i_0}-1} h_{i_0}(x)}{\partial x^T} \dot{x} = L_f^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_{i_0}-1} h_{i_0}(x) u_j \\ &= L_f^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) + \sum_{j=1}^m a_{i_0 j}(x) u_j \end{aligned}$$

由此式可见, 如不进行动态扩充, 求导数 r_{i_0} 次后 u_{j_0} 将出现。下面将会看到, 进行动态扩充后 u_{j_0} 并不出现, 而是在下一次求导后出现。

如选

$$p(x) = -L_f^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) \quad q(x) = 1 \quad (24-11)$$

(注意这一选择满足了 $p(x^0) = \frac{\partial L_f^{r_{i_0}-1} h_{i_0}}{\partial x} f(x^0) = 0$ 的要求)

则式(24-8)成为

$$0 = -L_f^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) + \zeta - \sum_{j=1}^m a_{i_0 j}(x) u_j$$

代入 $y_{i_0}^{(r_{i_0})}$ 式, 得

$$y_{i_0}^{(r_{i_0})} = \zeta \quad (24-12)$$

再求一次导数得

$$y_{i_0}^{(r_{i_0}+1)} = \dot{\zeta} = v_{j_0} \quad (24-13)$$

可见动态扩充使原 r_{i_0} 增加 1。

24.2.5 选定 $p(x)$ 和 $q(x)$ 后的新系统

按式(24-11)选定 $p(x)$ 和 $q(x)$ 后,代入式(24-7),得外动态系统

$$\begin{aligned} u_j &= v_j \quad \forall j \neq j_0 \\ u_{j_0} &= \frac{1}{a_{i_0 j_0}(x)} (-L_{f^{i_0}}^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) + \zeta + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m a_{i_0 j}(x) v_j) \\ \dot{\zeta} &= v_{j_0} \end{aligned} \quad (24-14)$$

代入式(24-10) 得新系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} L_{f^{i_0}}^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) + \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} \zeta + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m \left[g_j(x) - \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} a_{i_0 j}(x) \right] v_j \\ \dot{\zeta} &= v_{j_0} \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \quad (24-15)$$

或写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}_1(\tilde{x}) v_1 + \tilde{g}_2(\tilde{x}) v_2 \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}) &= \begin{bmatrix} f(x) - \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} L_{f^{i_0}}^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) + \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} \zeta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{g}_1(\tilde{x}) &= \begin{bmatrix} g_1(x) - \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} a_{i_0 1}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \tilde{g}_{j_0}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdots \tilde{g}_m(\tilde{x}) \\ &= \begin{bmatrix} g_m(x) - \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} a_{i_0 m}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入式(24-9)得

$$\zeta = a_{i_0}(x) u + L_{f^{i_0}}^{r_{i_0}} h_{i_0}(x) \quad (24-16)$$

最后强调指出,上述动态扩充算法可以多次迭代使用。比如在第一次迭代以后得到了式(24-13),可认为它是原系统,如果其相应的 $A(x)$ 在 $x=0$ 一邻域有不变的秩,则可对它

进行新一轮的动态扩充操作。

24.3 动态扩充的阶段分解定理

24.3.1 规范动态扩充

设式(24-5)的系统,经 l 次扩充后总的扩充为

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x, \zeta) + \beta(x, \zeta)v \\ \dot{\zeta} &= \gamma(x, \zeta) + \delta(x, \zeta)v \end{aligned} \quad (24-17)$$

代入原系统得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x, \zeta) + g(x)\beta(x, \zeta)v \\ \dot{\zeta} &= \gamma(x, \zeta) + \delta(x, \zeta)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (24-18)$$

不失一般性,设原系统平衡点 $x^0=0$,又设 $\alpha(0,0)=0, \gamma(0,0)=0$,则 $(x, \zeta)=(0,0)$ 是总扩充后系统的平衡点。

如果系统式(24-17)在

$$\begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

点有向量相对阶,则称系统式(24-18)是系统式(24-5)的规范动态扩充(regularizing dynamic extension)。当 $\dim(\zeta)=0$ 时,动态扩充式(24-17)退化为静态反馈($\beta(x)$ 在 $x^0=0$ 必为非奇异的)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

如果加此静态反馈后得到的闭环系统在 $x^0=0$ 有向量相对阶,则相应地称此扩充为平凡维的规范动态扩充(regularizing dynamic extension of trivial demension)。平凡维的规范动态扩充就是一个规范的静态反馈。

24.3.2 动态扩充的阶段分解

经多次动态扩充的系统可划分为几段。本小节研究各段之间的结构关系。

定理 24.1 设作为第一段,已执行动态扩充算法 k 次,第一段扩充综合为

$$\begin{aligned} u &= H(x, \xi) + K(x, \xi)\tilde{v} \\ \dot{\xi} &= F(x, \xi) + G(x, \xi)\tilde{v} \end{aligned} \quad (24-19)$$

式中, $\xi \in R^k$ 。如系统存在如下某个总的动态扩充

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x, \zeta) + \beta(x, \zeta)v \\ \dot{\zeta} &= \gamma(x, \zeta) + \delta(x, \zeta)v \end{aligned} \quad (24-20)$$

式中, $\zeta \in R^l$,则必定 $k \leq l$,且在合成系统式(24-18)的总状态空间内部存在一局部坐标变换:变换定义在 $(x, \zeta)=(0,0)$ 的一个邻域,变换中 x 保持不变, ζ 被代换为 ξ 和 z , $z \in R^{l-k}$,即

$$\begin{pmatrix} \xi \\ z \end{pmatrix} = \phi(x, \zeta)$$

能把合成系统式(24-18)变换为下面的分两阶段形式的系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)(H(x, \xi) + K(x, \xi)[\tilde{\alpha}(x, \xi, z) + \tilde{\beta}(x, \xi, z)v]) \\ \dot{\xi} &= F(x, \xi) + G(x, \xi)[\tilde{\alpha}(x, \xi, z) + \tilde{\beta}(x, \xi, z)v] \\ \dot{z} &= \tilde{\gamma}(x, \xi, z) + \tilde{\delta}(x, \xi, z)v \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

即总动态扩充式(24-20)可看成是由式(24-19)和下面的第二阶段规范动态扩充两者合成的

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \tilde{\alpha}(x, \xi, z) + \tilde{\beta}(x, \xi, z)v \\ \dot{z} &= \tilde{\gamma}(x, \xi, z) + \tilde{\delta}(x, \xi, z)v\end{aligned}$$

证明 见参考文献[2]的第254~257页。本书从略。要说明的是,在本定理的证明中,重复进行动态扩充迭代的条件使用了较24.2.1节基本假设“ $A(x)$ 在 $x^0=0$ 一邻域有不变的秩”要弱的条件。只要求 $A(x)$ 的第 p 行 $a_p(x)$ 可用前 $p-1$ 行线性表示

$$a_p(x) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i(x)a_i(x)$$

和对某 i_0, j_0 来说, $c_{i_0}(x)$ 不恒等于零以及 $a_{i_0 j_0}(x^0) \neq 0$ 。

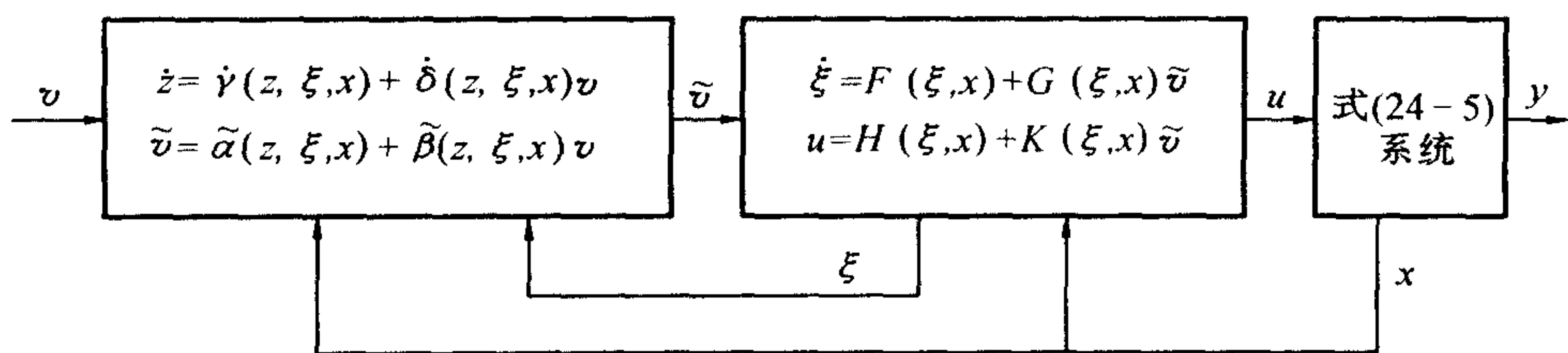


图 24-1 动态扩充的阶段分解

上面定理的阶段分解,如图24-1所示。定理说明,如果动态扩充算法被迭代 k 次得到一结果,同时通过另外的动态反馈已经得到了一个在 $(x, \xi) = (0, 0)$ 有某个向量相对阶 $r = r_1 + \dots + r_m$ 的合成系统,则后动态反馈的结果必定包含用前动态扩充算法得到的结果。还说明,用上述动态扩充算法作为基本分段做相应的共 r 次迭代,必可构成后动态反馈。因此,如果扩充存在,则上述动态扩充算法可视为解决构造规范动态扩充问题的标准方法。

定理还说明,任何两个规范动态扩充必定有同样的维数。这意味着动态扩充算法总有同样的迭代次数。

24.4 动态扩充算法举例——飞行器控制

24.4.1 风轴坐标系

24.4.1.1 风轴坐标系与运动坐标系的关系

建立在地面的坐标系称固定坐标系。建立在飞行器上的坐标系称运动坐标系。此外,本例还使用风轴坐标系。各坐标系一律用右手坐标系,规定符合右手螺旋定则的绕轴转角为正值。

所谓风轴就是飞行器路径切向绝对速度 V 的方向。风轴坐标系以风轴作为 x^* 轴方向。风轴坐标系轴与飞行器运动坐标系轴之间的指向关系不是用三个角,而是用两个角,即漂角 β 和冲角 α 来表示(见图 24-2)。漂角 β 是指风轴与飞行器纵中面间的夹角,以左侧来风为正角。冲角 α 是指风轴在飞行器纵中面上的投影线与飞行器运动坐标系纵轴 x 间的夹角,以下侧来风为正角。风轴坐标系中风轴(x^* 轴)以外的另两个坐标轴 y^* 和 z^* 轴通过以下的旋转确定:整个运动坐标系 x, y, z 三轴绕飞行器运动坐标系 y 轴转动 $-\alpha$ 角(这时 z 轴到达 z^* 轴位置, z^* 轴在飞行器纵中面上),以后再绕 z^* 轴转动 $-\beta$ 角,两转动完成后, x 轴将与风轴 x^* 重合,这时的 y 轴和 z 轴所在方向即为 y^* 轴和 z^* 轴方向。 z^* 轴必在飞行器纵中面上。

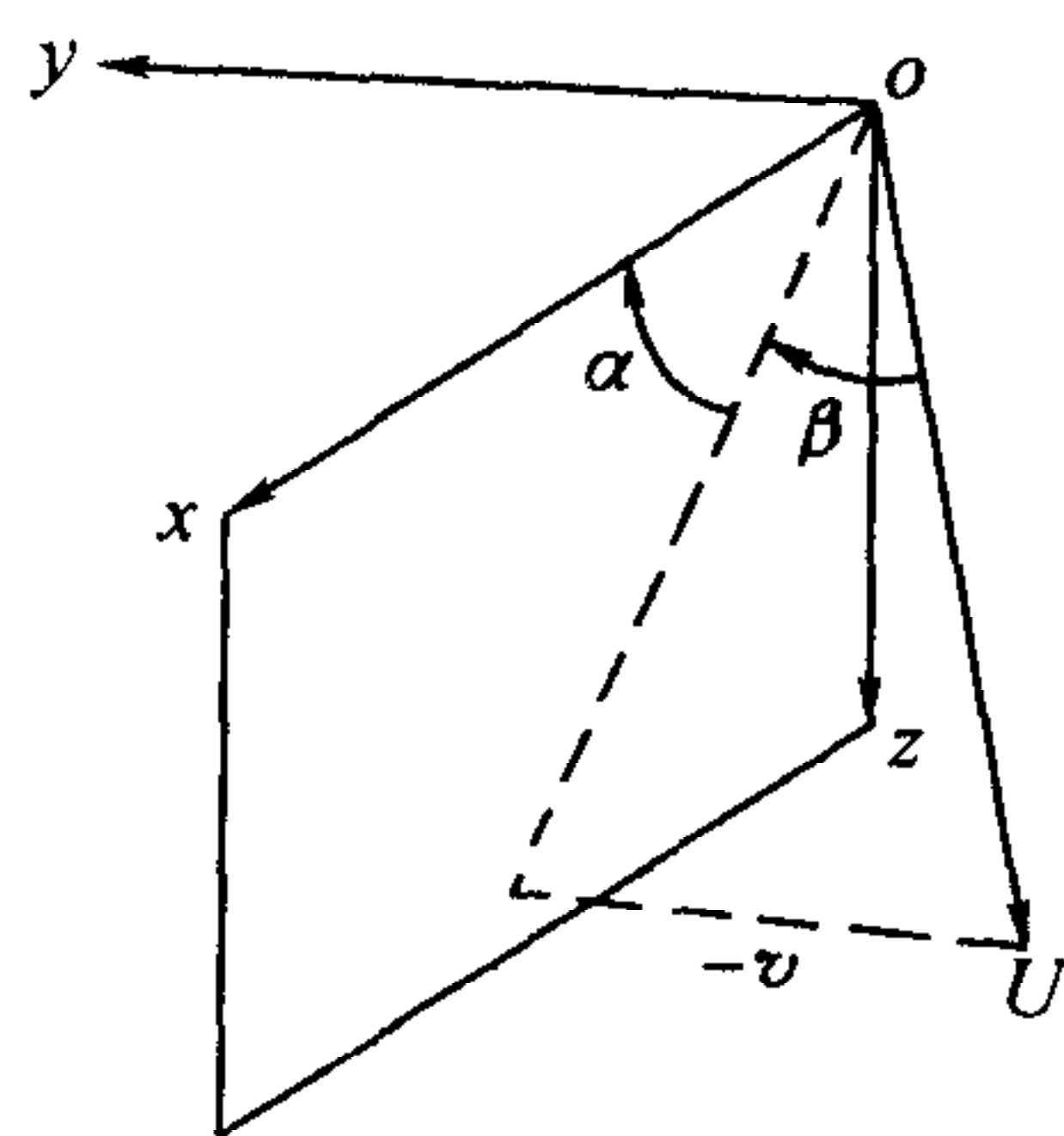


图 24-2 冲角和漂角

以上旋转也可表述为:整个风轴坐标系 x^*, y^*, z^* 三轴,绕风轴坐标系 z^* 轴(转动前 z^* 轴在飞行器纵中面内)转动 β 角,转动后 y^* 轴与 y 轴重合;以后再绕 y 轴转动 α 角,两转动完成后,两坐标系完全重合。

运动坐标系经历两次旋转到达风轴坐标系的位置。两坐标系之间的转换阵是

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -\sin\beta & \sin\alpha \cos\beta \\ \cos\alpha \sin\beta & \cos\beta & \sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (24-21)$$

同一向量在风轴坐标系中的向量表示 v^* 与在运动坐标系中的向量表示 v 之间的变换关系为

$$v^* = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -\sin\beta & \sin\alpha \cos\beta \\ \cos\alpha \sin\beta & \cos\beta & \sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = S_1 v \quad (24-22)$$

展开后,得

$$\begin{aligned} v_1^* &= v_1 \cos\alpha \cos\beta - v_2 \sin\beta + v_3 \sin\alpha \cos\beta \\ v_2^* &= v_1 \cos\alpha \sin\beta + v_2 \cos\beta + v_3 \sin\alpha \sin\beta \\ v_3^* &= -v_1 \sin\alpha + v_3 \cos\alpha \end{aligned} \quad (24-23a)$$

其反变换为

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1^* \cos\alpha \cos\beta + v_2^* \cos\alpha \sin\beta - v_3^* \sin\alpha \\ v_2 &= -v_1^* \sin\beta + v_2^* \cos\beta \\ v_3 &= v_1^* \sin\alpha + v_2^* \sin\alpha \sin\beta + v_3^* \cos\alpha \end{aligned} \quad (24-23b)$$

分别计算 $v_1^* \cos\beta$ 和 $v_2^* \sin\beta$ 后,可推得运动坐标系和风轴坐标系间恒存在的一个重要的一般关系式

$$v_1^* \cos\beta + v_2^* \sin\beta = v_1 \cos\alpha + v_3 \sin\alpha \quad (24-24)$$

此关系式成立的前提条件是 z^* 轴始终处于飞行器纵中面内。这是 z^* 轴处于飞行器纵中面内的约束条件。

每种坐标系都可以用来表示飞行器的绝对运动、气流运动和飞行器相对气流的运动,只是在表达是否简练、方便方面彼此不同。运动坐标系便于表达飞行器相对静止空气的运动。风轴坐标系便于表达小环境气流的运动。固定坐标系便于表达飞行器的绝对运动。

24.4.1.2 风轴坐标系与固定坐标系的关系

类似于运动坐标系与固定坐标系的关系,固定坐标系经三次绕轴旋转,可与风轴坐标系重合,得到类似的变换阵

$$S^* = \begin{bmatrix} \cos\psi^* \cos\theta^* & \cos\psi^* \sin\theta^* \sin\varphi^* - \sin\psi^* \cos\varphi^* & \cos\psi^* \sin\theta^* \cos\varphi^* + \sin\psi^* \sin\varphi^* \\ \sin\psi^* \cos\theta^* & \sin\psi^* \sin\theta^* \sin\varphi^* + \cos\psi^* \cos\varphi^* & \sin\psi^* \sin\theta^* \cos\varphi^* - \cos\psi^* \sin\varphi^* \\ -\sin\theta^* & \cos\theta^* \sin\varphi^* & \sin\theta^* \sin\varphi^* \end{bmatrix} \quad (24-25)$$

同一向量在风轴坐标系的表示 v^* 和在固定坐标系的表示 v^j 间的换算关系为

$$v^j = S^* v^* \quad (24-26)$$

采用与运动坐标系类似的方法,可得到风轴坐标系的姿态运动学方程。所谓姿态运动学方程,实际上就是 $\dot{\varphi}^*, \dot{\theta}^*, \dot{\psi}^*$ 和 p^*, q^*, r^* 间的换算关系。仿照第 23 章式(23-16)给出的运动坐标系姿态运动学方程,风轴坐标系的姿态运动学方程可写为

$$\dot{\Lambda}^* = M(\Lambda^*) \Omega^* \quad (24-27)$$

式中, $\Lambda^* = (\varphi^* \quad \theta^* \quad \psi^*)^T$ 是姿态角向量; $\varphi^*, \theta^*, \psi^*$ 分别为风轴坐标系相对于固定坐标系的横倾角、纵倾角和偏航角。

$$M(\Lambda^*) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi^* \tan\theta^* & \cos\varphi^* \tan\theta^* \\ 0 & \cos\varphi^* & -\sin\varphi^* \\ 0 & \sin\varphi^* / \cos\theta^* & \cos\varphi^* / \cos\theta^* \end{bmatrix} \quad (24-28)$$

式(24-27)还可写为

$$\text{col}(\dot{\varphi}^*, \dot{\theta}^*, \dot{\psi}^*) = M(\varphi^*, \theta^*, \psi^*) \Omega^* \quad (24-29)$$

24.4.1.3 Ω, Ω^* 与 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 间的换算关系

投影到飞行器运动坐标系的角速度向量记为 $\Omega = (p \quad q \quad r)^T$ 。 p, q, r 分别为横倾角速度、纵倾角速度和偏航角速度,即角速度在运动坐标系三轴的投影值。投影到风轴坐标系的角速度向量记为 $\Omega^* = (p^* \quad q^* \quad r^*)^T$ 。 p^*, q^*, r^* 分别为相对于风轴坐标系的横倾角速度、纵倾角速度和首向角速度,即角速度在风轴坐标系三轴的投影值。

由式(24-23a)知下面的变换关系成立

$$r^* = -p \sin\alpha + r \cos\alpha$$

由式(24-23b)知有下面的变换关系成立

$$q = -p^* \sin\beta + q^* \cos\beta$$

由式(24-24), Ω^* 和 Ω 间的以下关系总是成立的

$$p^* \cos\beta + q^* \sin\beta = p \cos\alpha + r \sin\alpha \quad (24-30)$$

依据以上的风轴坐标系和运动坐标系的关系,可求得漂角变化率和冲角变化率。首先,漂角的变化率 $\dot{\beta}$ 等于漂角两角边各自绕 z^* 轴的角速度之差。因为 x^* 轴(风轴),作为一角边,绕 z^* 轴的角速度等于 r^* ,风轴在飞行器纵中面上的投影线作为漂角的另一角边,绕

z^* 轴的角速度等于 $r \cos \alpha - p \sin \alpha$, 所以得

$$\dot{\beta} = r \cos \alpha - p \sin \alpha - r^* \quad (24-31)$$

其次, 冲角的变化率 $\dot{\alpha}$ 等于冲角两角边各自绕 y 轴的角速度之差。因为风轴在飞行器纵中面上的投影线作为一角边, 绕 y 轴的角速度等于 $-p^* \sin \beta + q^* \cos \beta$; x 轴, 作为冲角的另一角边, 绕 y 轴的角速度等于 q , 所以得

$$\dot{\alpha} = q + p^* \sin \beta - q^* \cos \beta \quad (24-32)$$

用角速度一般关系式(24-30), 消去 p^* , 得

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q - q^* \cos \beta - q^* \sin \beta \tan \beta + (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \tan \beta \\ &= q - q^* \sec \beta + (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \tan \beta \end{aligned} \quad (24-33)$$

由此式得

$$q^* = (q - \dot{\alpha}) \cos \beta + (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \sin \beta$$

代入式(24-32), 可得

$$p^* = (\dot{\alpha} - q) \sin \beta + (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \cos \beta \quad (24-34)$$

上面的关系可用矩阵形式表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p^* \\ q^* \\ r^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24-35)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^* \\ q^* \\ r^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (24-36)$$

24.4.2 风轴轴向动力学方程

动力学方程必须在惯性坐标系下建立。在飞行器飞行路径切线方向, 即风轴方向使用牛顿第二定律, 当横倾角 φ^* 不大时, 动力学方程可近似写为

$$m \dot{V} = -D - mg \sin \theta^* \quad (24-37)$$

式中 V ——飞行器运动绝对速度;

m ——飞行器质量;

g ——重力加速度;

D ——空气阻力和牵引力, 忽略 $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ 影响时, 可近似表示为

$$D = V^2 (c_{11} + c_{12} \cos \alpha) - P \delta_p \cos \alpha \cos \beta \quad (24-38)$$

P ——最大牵引力;

δ_p ——气门开度;

c_{11}, c_{12} ——空气动力系数, 固定常数。

在空气动力升力方向($-z^*$ 轴方向)的受力将引起向心加速度 $m V q^*$, 力与向心加速度之间的关系为

$$m V q^* = L - mg \cos \theta^* \cos \varphi^* \quad (24-39)$$

在 $-z^*$ 轴方向的力包括牵引力和空气动力,忽略 $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ 影响时,近似为

$$L = P\delta_p \sin\alpha + c_{21} + c_{22}\sin 2\alpha \quad (24-40)$$

在侧向(y^* 轴)方向的受力将引起向心加速度 mVr^* ,力与向心加速度之间的关系为

$$mVr^* = S + mg\cos\theta^* \sin\varphi^* \quad (24-41)$$

y^* 轴方向的力包括牵引力和空气动力,忽略 $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ 影响时,近似为

$$S = P\delta_p \cos\alpha \sin\beta + V^2 c_{31} \sin 2\beta \quad (24-42)$$

重力以外的外力综合在一起为

$$\begin{bmatrix} D \\ L \\ S \end{bmatrix} = V^2 \begin{bmatrix} c_{11} + c_{12}\cos\alpha \\ c_{21} + c_{22}\sin 2\alpha \\ c_{31}\sin 2\beta \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} -\cos\alpha \cos\beta \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \sin\beta \end{bmatrix} \delta_p \quad (24-43)$$

24.4.3 运动坐标系力矩平衡方程

动力学方程在惯性坐标系下建立,以后经换算,得到在运动坐标系下的表示。第 23 章式(23-19)已经给出了如下的飞行器的姿态动力学方程。

$$J\dot{\Omega}(t) = W(\Omega(t))J\Omega(t) + T(t) \quad (24-44)$$

式中 J ——惯量矩阵。在飞行器外形和内部布置左右完全对称时,有

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{J_z}{J_x J_z - J_{xz}^2} & 0 & \frac{J_{xz}}{J_x J_z - J_{xz}^2} \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ \frac{J_{xz}}{J_x J_z - J_{xz}^2} & 0 & \frac{J_x}{J_x J_z - J_{xz}^2} \end{bmatrix}$$

$W(\Omega)$ ——角速度斜对称阵

$$W(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

T ——外力矩向量,即空气动力矩,包括舵、翼控制力矩,忽略推力影响时,可近似表示为

$$T = V \begin{bmatrix} a_{12}r + a_{13}p \\ a_{23}q \\ a_{32}r + a_{33}p \end{bmatrix} + V^2 \begin{bmatrix} a_{11}\sin\beta \\ a_{21} + a_{22}\sin\alpha \\ a_{31}\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$+ V^2 \begin{bmatrix} b_{11}\cos\beta & 0 & b_{13}\cos\beta \\ 0 & b_{22}\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (24-45)$$

式中 a_{ij}, b_{ij} ——空气动力系数,是固定常数,取决于飞行器的几何外形、空气密度等;

$\delta_a, \delta_e, \delta_r$ ——分别表示副翼、升降舵和方向舵的偏转角。

24.4.4 状态方程

选择 9 个状态变量, 分成 3 个子集

$$x_1 = (V \quad \theta^* \quad \psi^*)^T \quad x_2 = (\varphi^* \quad \alpha \quad \beta)^T \quad x_3 = (p \quad q \quad r)^T$$

输入变量 4 个, 分成两个子集

$$u_1 = \delta_p \quad u_2 = (\delta_a \quad \delta_e \quad \delta_r)^T$$

与各状态对应的原方程为

$$\dot{V} = -D/m - g \sin \theta^* \quad (24-46)$$

$$\dot{\theta}^* = q^* \cos \varphi^* - r^* \sin \varphi^* \quad (24-47)$$

$$\dot{\psi}^* = q^* \sin \varphi^* / \cos \theta^* + r^* \cos \varphi^* / \cos \theta^* \quad (24-48)$$

$$\dot{\varphi}^* = p^* + q^* \sin \varphi^* \tan \theta^* + r^* \cos \varphi^* \tan \theta^* \quad (24-49)$$

$$\dot{\alpha} = q - q^* \sec \beta + (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \tan \beta \quad (24-50)$$

$$\dot{\beta} = r \cos \alpha - p \sin \alpha - r^* \quad (24-51)$$

$$\dot{\Omega} = J^{-1} W(\Omega) J \Omega + J^{-1} T \quad (24-52)$$

把各式右端的 p^*, q^*, r^* 以下列各式代入

$$p^* = (\dot{\alpha} - q) \sin \beta + (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \cos \beta \quad (24-53)$$

$$q^* = \frac{1}{mV} (L - mg \cos \theta \cos \varphi) \quad (24-54)$$

$$r^* = \frac{1}{mV} (-S + mg \cos \theta \sin \varphi) \quad (24-55)$$

以上各式中的 D, L, S 和 T 以式(24-33)和式(24-38)代入。

把以上各式中的状态变量和控制变量代换为 x_1, x_2, x_3 和 u_1, u_2 , 整理后得到状态方程

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_{21} + g_3(x)u_{22} + g_4(x)u_{23} \quad (24-56a)$$

$$y = h(x) \quad (24-56b)$$

式中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{31} \end{bmatrix}$$

$$g_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{32} \end{bmatrix} \quad g_4(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33} \end{bmatrix} \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \theta^* \\ \psi^* \end{bmatrix} = x_1$$

展开后可写为

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) + G_1(x_1, x_2)u_1 \quad (24-57a)$$

$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, x_3) + G_2(x_1, x_2)u_1 \quad (24-57b)$$

$$\dot{x}_3 = F_3(x_1, x_2, x_3) + G_3(x_1, x_2, x_3)u_2 \quad (24-57c)$$

$$y = x_1 \quad (24-57d)$$

式中, F_1, F_2, F_3, G_1, G_2 都是 3×1 向量; G_3 是 3×3 矩阵。 G_1, G_2, G_3 的详细表达式可参见[60], 此处略去。下面将用 $(F_1)_i$ 分别表示 F_1 的第 i 个分量; $(G_1)_i, (G_2)_i$ 分别表示

G_1, G_2 的第 i 个分量; 用 G_{31}, G_{32}, G_{33} 分别表示 G_3 的第 1, 2, 3 列; 用 $(G_{31})_i, (G_{32})_i, (G_{33})_i$ 分别表示 G_3 的第 1, 2, 3 列的第 i 个分量。飞行器系统的输出是 3 维, 输入是 4 维。

24.4.5 求 r_1, r_2, r_3 和 $A(x)$

用求导的方法求相对阶。因为求导一次后得到

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) + G_1(x_1, x_2)u_1$$

已有控制变量 u_1 出现, 而且因为向量 $G_1(x_1, x_2)$ 的三个分量没有一个恒等于零, 所以得 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ 。下面求矩阵 $A(x)$ 。

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x^T} g_1(x) = \frac{\partial (x_1)_1}{\partial x^T} g_1(x) \\ &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_1)_1 \\ (G_1)_2 \\ (G_1)_3 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_2)_1 \\ (G_2)_2 \\ (G_2)_3 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (G_1)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{g_2} h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x^T} g_2(x) = \frac{\partial (x_1)_1}{\partial x^T} g_2(x) \\ &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_{31})_1 \\ (G_{31})_2 \\ (G_{31})_3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$L_{g_3} h_1 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_{32})_1 \\ (G_{32})_2 \\ (G_{32})_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{g_4} h_1 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_{33})_1 \\ (G_{33})_2 \\ (G_{33})_3 \end{bmatrix} = 0$$

对 $h_2(x), h_3(x)$ 做同样计算, 最后得

$$A(x) = \begin{bmatrix} (G_1)_1 & 0 & 0 & 0 \\ (G_1)_2 & 0 & 0 & 0 \\ (G_1)_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24-58)$$

因为 $A(x)$ 不满秩, 所以相对阶无定义。

24.4.6 动态扩充第一次迭代

取 $i_0 = 1, j_0 = 1$, 取

$$p(x) = -L_f^j h_1(x) = -L_f h_1(x) = -\frac{\partial (x_1)_1}{\partial x^T} f(x)$$

$$\begin{aligned} &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (F_1)_1 \\ (F_1)_2 \\ (F_1)_3 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (F_2)_1 \\ (F_2)_2 \\ (F_2)_3 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (F_3)_1 \\ (F_3)_2 \\ (F_3)_3 \end{bmatrix} \\ &= -(F_1)_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$q(x)=1$$

按动态扩充公式(24-7),定义动态反馈

标量输入

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{a_{11}(x)}(p(x) + q(x)\zeta_1 - \sum_{j=2}^4 a_{1j}(x)v_j) \\ &= \frac{1}{(G_1)_1(x_1, x_2)}(-(F_1)_1(x_1, x_2) + \zeta_1) \end{aligned} \quad (24-59a)$$

向量输入

$$u_2 = v_2 \quad (24-59b)$$

扩充状态

$$\dot{\zeta} = v_1 \quad (24-59c)$$

把 u_1 代入式(24-57a)得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2) + G_1(x_1, x_2) \frac{1}{(G_1)_1(x_1, x_2)}(-(F_1)_1(x_1, x_2) + \zeta_1) \\ &= F_1(x_1, x_2) - G_1(x_1, x_2) \frac{(F_1)_1(x_1, x_2)}{(G_1)_1(x_1, x_2)} + \frac{G_1(x_1, x_2)}{(G_1)_1(x_1, x_2)} \zeta_1 \\ &= H_1(x_1, x_2) + K_1(x_1, x_2) \zeta_1 = B_1(x_1, x_2, \zeta_1) \end{aligned} \quad (24-60a)$$

式中 $H_1(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2) - G_1(x_1, x_2) \frac{(F_1)_1(x_1, x_2)}{(G_1)_1(x_1, x_2)}$

$$K_1(x_1, x_2) = \frac{G_1(x_1, x_2)}{(G_1)_1(x_1, x_2)}$$

因为 G_1 第一个分量与分母 $(G_1)_1$ 相同, $(K_1)_1 = 1$, 所以有 $(\dot{x}_1)_1 = (B_1)_1 = \zeta_1$, 并且

$$\dot{\zeta}_1 = v_1 \quad (24-60b)$$

把 u_1 代入式(24-57b), 得

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3) + G_2(x_1, x_2) \frac{1}{(G_1)_1(x_1, x_2)}(-(F_1)_1(x_1, x_2) + \zeta_1) \\ &= H_2(x_1, x_2, x_3) + K_2(x_1, x_2) \zeta_1 \end{aligned} \quad (24-60c)$$

式中

$$H_2(x_1, x_2, x_3) = F_2(x_1, x_2, x_3) - G_2(x_1, x_2) \frac{(F_1)_1(x_1, x_2)}{(G_1)_1(x_1, x_2)}$$

$$K_1(x_1, x_2) = \frac{G_2(x_1, x_2)}{(G_1)_1(x_1, x_2)}$$

把 u_2 代入式(24-57c), 得

$$\dot{x}_3 = F_3(x_1, x_2, x_3) + G_3(x_1, x_2, x_3)v_2 \quad (24-60d)$$

式中

$$v_2 = u_2$$

第一次扩充后,系统的状态变量和向量场为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} B_1 \\ H_2 + K_2 \zeta_1 \\ F_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24-61a)$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{31} \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24-61b)$$

注意,式(24-61a)和式(24-61b)中各向量前三行是 3×1 向量,最后一行是标量。

24.4.7 再次求 r_1, r_2, r_3 和 $A(x)$

因为

$$y^{(1)} = \dot{x}_1 = H_1(x_1, x_2) + K_1(x_1, x_2)\zeta_1 = B_1(x_1, x_2, \zeta_1)$$

没有控制量出现,继续求导数

$$y^{(2)} = \frac{\partial B_1}{\partial x_1^T}(H_1 + K_1\zeta_1) + \frac{\partial B_1}{\partial x_2^T}(H_2 + K_2\zeta_2) + K_1v_1$$

已有控制量出现,而且,因为向量 $K_1(x_1, x_2)$ 正比于 $G_1(x_1, x_2)$,其三个分量没有一个恒等于零,所以知 $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ 。下面求矩阵 $A(x)$ 。对 $k=0$,得

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x^T} g_1(x) = \frac{\partial (x_1)_1}{\partial x^T} g_1(x) \\ &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0][1] = 0 \\ L_{g_2} h_1(x) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_{31})_1 \\ (G_{31})_2 \\ (G_{31})_3 \end{bmatrix} + [0][0] = 0 \\ L_{g_3} h_1(x) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_{32})_1 \\ (G_{32})_2 \\ (G_{32})_3 \end{bmatrix} + [0][0] = 0 \\ L_{g_4} h_1(x) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (G_{33})_1 \\ (G_{33})_2 \\ (G_{33})_3 \end{bmatrix} + [0][0] = 0 \end{aligned}$$

类似地得

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_2(x) &= 0 & L_{g_2} h_2(x) &= 0 & L_{g_3} h_2(x) &= 0 & L_{g_4} h_2(x) &= 0 \\ L_{g_1} h_3(x) &= 0 & L_{g_2} h_3(x) &= 0 & L_{g_3} h_3(x) &= 0 & L_{g_4} h_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

对 $k=1$,得

$$\begin{aligned} L_f h_1(x) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (B_1)_1 \\ (B_1)_2 \\ (B_1)_3 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (H_2 + K_2\zeta_1)_1 \\ (H_2 + K_2\zeta_1)_2 \\ (H_2 + K_2\zeta_1)_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} (F_3)_1 \\ (F_3)_2 \\ (F_3)_3 \end{bmatrix} + [0][0] = (B_1)_1 = \zeta_1 \end{aligned}$$

同理得

$$L_f h_2(x) = (B_1)_2$$

$$L_f h_3(x) = (B_1)_3$$

计算

$$L_{g_1} L_f h_1(x) = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) g_1(x) = 1$$

$$L_{g_2} L_f h_1(x) = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_3} L_f h_1(x) = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x^T} \right) g_3(x) = 0$$

$$L_{g_4} L_f h_1(x) = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x^T} \right) g_4(x) = 0$$

对 $h_2(x), h_3(x)$ 做同样计算, 最后得

$$L_{g_1} L_f h_2(x) = \left(\frac{\partial (B_1(x_1, x_2, \zeta_1))_2}{\partial x^T} \right) g_1(x) = \frac{\partial (B_1)_2}{\partial \zeta_1}$$

$$L_{g_2} L_f h_2(x) = \left(\frac{\partial (B_1)_2}{\partial x^T} \right) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_3} L_f h_2(x) = \left(\frac{\partial (B_1)_2}{\partial x^T} \right) g_3(x) = 0$$

$$L_{g_4} L_f h_2(x) = \left(\frac{\partial (B_1)_2}{\partial x^T} \right) g_4(x) = 0$$

$$L_{g_1} L_f h_3(x) = \left(\frac{\partial (B_1(x_1, x_2, \zeta_1))_3}{\partial x^T} \right) g_1(x) = \frac{\partial (B_1)_3}{\partial \zeta_1}$$

$$L_{g_2} L_f h_3(x) = \left(\frac{\partial (B_1)_3}{\partial x} \right) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_3} L_f h_3(x) = \left(\frac{\partial (B_1)_3}{\partial x^T} \right) g_3(x) = 0$$

$$L_{g_4} L_f h_3(x) = \left(\frac{\partial (B_1)_3}{\partial x^T} \right) g_4(x) = 0$$

结果得

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial (B_1)_2}{\partial \zeta_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial (B_1)_3}{\partial \zeta_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24-62)$$

因为 $A(x)$ 不满秩, 所以相对阶无定义。

24.4.8 动态扩充第二次迭代

因 $A(x)$ 的第一行是 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$, 取 $i_0 = 1, j_0 = 1$ 。取

$$p(x) = -L_f^2 h_1(x) = -L_f^2 h_1(x)$$

$$q(x) = 1$$

按动态扩充公式(24-7),定义动态反馈如下:

标量输入

$$v_1 = \frac{1}{a_{11}(x)}(p(x) + q(x)\zeta_2 - \sum_{j=2}^4 a_{1j}(x)v_j) = \zeta_2 \quad (24-63a)$$

向量输入

$$v_2 = w_2 \quad (24-63b)$$

扩充标量状态

$$\dot{\zeta}_2 = w_1 \quad (24-63c)$$

把 v_1 和 v_2 代入第 1 次迭代后的系统式(24-60),得

$$\dot{x} = H_1(x_1, x_2) + K_1(x_1, x_2)\zeta_1 \quad (24-64a)$$

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \quad (24-64b)$$

$$\dot{\zeta}_2 = w_1 \quad (24-64c)$$

$$\dot{x}_2 = H_2(x_1, x_2, x_3) + K_2(x_1, x_2)\zeta_1 \quad (24-64d)$$

$$\dot{x}_3 = F_3(x_1, x_2, x_3) + G_3(x_1, x_2, x_3)w_2 \quad (24-64e)$$

第二次扩充后系统的状态变量和向量场为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} H_1 + K_1 \zeta_1 \\ H_2 + K_2 \zeta_1 \\ F_3 \\ \zeta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ H_2 + K_2 \zeta_1 \\ F_3 \\ \zeta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24-65a)$$

$$g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{31} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_4(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24-65b)$$

注意,式(24-65a)和式(24-65b)中各向量前三行是 3×1 向量,最后两行是标量。

24.4.9 第三次求 r_1, r_2, r_3 和 $A(x)$

因为

$$y^{(1)} = \dot{x}_1 = H_1(x_1, x_2) + K_1(x_1, x_2)\zeta_1 = B_1(x_1, x_2, \zeta_1)$$

没有控制量出现,继续求导数

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \frac{\partial B_1}{\partial x_1^T}(H_1 + K_1 \zeta_1) + \frac{\partial B_1}{\partial x_2^T}(H_2 + K_2 \zeta_2) + K_1 \zeta_2 \\ &= B_2(x_1, x_2, x_3, \zeta_1, \zeta_2) \end{aligned}$$

没有控制量出现,继续求导数

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= \frac{\partial B_2}{\partial x_1^T}(H + K_1 \zeta_1) + \frac{\partial B_2}{\partial x_2^T}(H_2 + K_2 \zeta_2) \\ &\quad + \frac{\partial B_2}{\partial x_3^T}(F_3 + G_3 w_2) + \frac{\partial B_2}{\partial \zeta_1} \zeta_2 + K_1 w_1 \end{aligned}$$

已有控制 w_1, w_2 出现, 而且, 因为向量 $K_1(x_1, x_2)$ 比例于 $G_1(x_1, x_2)$, 其三个分量没有一个恒等于零, 所以知 $r_1 = r_2 = r_3 = 3$ 。下面求矩阵 $A(x)$ 。对 $k=0$, 得

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_1(x) &= 0 & L_{g_2} h_1(x) &= 0 & L_{g_3} h_1(x) &= 0 & L_{g_4} h_1(x) &= 0 \\ L_{g_1} h_2(x) &= 0 & L_{g_2} h_2(x) &= 0 & L_{g_3} h_2(x) &= 0 & L_{g_4} h_2(x) &= 0 \\ L_{g_1} h_3(x) &= 0 & L_{g_2} h_3(x) &= 0 & L_{g_3} h_3(x) &= 0 & L_{g_4} h_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

对 $k=1$, 得

$$\begin{aligned} L_f h_1(x) &= (B_1)_1 = \zeta_1 & L_f h_2(x) &= (B_1)_2 & L_f h_3(x) &= (B_1)_3 \\ L_{g_1} L_f h_1(x) &= 0 & L_{g_2} L_f h_1(x) &= 0 & L_{g_3} L_f h_1(x) &= 0 & L_{g_4} L_f h_1(x) &= 0 \\ L_{g_1} L_f h_2(x) &= 0 & L_{g_2} L_f h_2(x) &= 0 & L_{g_3} L_f h_2(x) &= 0 & L_{g_4} L_f h_2(x) &= 0 \\ L_{g_1} L_f h_3(x) &= 0 & L_{g_2} L_f h_3(x) &= 0 & L_{g_3} L_f h_3(x) &= 0 & L_{g_4} L_f h_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

在后面的推导中注意以下关系: 因为 $y^{(1)} = B_1, y^{(2)} = B_2, B_2 = \dot{B}_1$, 所以 $(B_2)_1 = (\dot{B}_1)_1, (B_2)_2 = (\dot{B}_1)_2, (B_2)_3 = (\dot{B}_1)_3$ 。又因为 $\zeta_2 = \dot{\zeta}_1$ 和 $L_f h_1(x) = (B_1)_1 = \zeta_1$, 所以 $\zeta_2 = (B_2)_1$ 。

对 $k=2$, 得

$$\begin{aligned} L^2 f h_1(x) &= \frac{\partial L_f h_1}{\partial x^T} f(x) = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x^T} f(x) = \zeta_2 = (B_2)_1 \\ L^2 f h_2(x) &= \frac{\partial L_f h_2}{\partial x^T} f(x) = \frac{\partial (B_1)_2}{\partial x^T} f(x) \\ &= \frac{\partial (B_1(x_1, x_2, \zeta_1))_2}{\partial x^T} (\dot{x} - g_1(x)w_1 - G_3(x)w_2) \\ &= \frac{\partial (B_1(x_1, x_2, \zeta_1))_2}{\partial x^T} \dot{x} = (\dot{B}_1)_2 = (B_2)_2 \\ L^2 f h_3(x) &= \frac{\partial L_f h_3}{\partial x^T} f(x) = \frac{\partial (B_1)_3}{\partial x^T} f(x) \\ &= \frac{\partial (B_1(x_1, x_2, \zeta_1))_3}{\partial x^T} (\dot{x} - g_1(x)w_1 - G_3(x)w_2) \\ &= \frac{\partial (B_1(x_1, x_2, \zeta_1))_3}{\partial x^T} \dot{x} = (\dot{B}_1)_3 = (B_2)_3 \end{aligned}$$

综合在一起, 有

$$L^2 f h(x) = B_2$$

计算

$$L_{g_1} L^2 f h(x) = \frac{\partial B_2}{\partial x^T} g_1(x) = \frac{\partial B_2}{\partial \zeta_2} = K_1$$

注意到 B_2 中只有 H_2 是 x_3 的函数, 得

$$\begin{aligned} L_{g_2} L^2 f h(x) &= \frac{\partial B_2}{\partial x^T} g_2(x) = \frac{\partial B_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{31})_1 \\ (G_{31})_2 \\ (G_{31})_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial B_1}{\partial x_2^T} \frac{\partial H_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{31})_1 \\ (G_{31})_2 \\ (G_{31})_3 \end{bmatrix} \\ L_{g_3} L^2 f h(x) &= \frac{\partial B_2}{\partial x^T} g_3(x) = \frac{\partial B_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{32})_1 \\ (G_{32})_2 \\ (G_{32})_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial B_1}{\partial x_2^T} \frac{\partial H_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{32})_1 \\ (G_{32})_2 \\ (G_{32})_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$L_{g_4} L_f^2 h(x) = \frac{\partial B_2}{\partial x^T} g_4(x) = \frac{\partial B_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{33})_1 \\ (G_{33})_2 \\ (G_{33})_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial B_1}{\partial x_2^T} \frac{\partial H_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{33})_1 \\ (G_{33})_2 \\ (G_{33})_3 \end{bmatrix}$$

结果得

$$A(x) = \left[K_1(x_1, x_2) \frac{\partial B_1(x_1, x_2, \zeta_1)}{\partial x_2^T} \frac{\partial H_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^T} G_3(x_1, x_2, x_3) \right] \quad (24-66)$$

通过计算知,此矩阵在扩充状态空间的 $V \neq 0, \theta = \psi = \varphi = \alpha = \beta = \zeta_1 = 0$ 的域的任何点上,其秩等于 3。因此,扩充系统在状态空间的开稠子集的任意点上有相对阶 $\{3, 3, 3\}$ 。

24.4.10 引入第 4 个输出函数 φ

取 $y_4 = \varphi$, 则

$$y_4^{(1)} = (\dot{x}_2)_1 = (H_2)_1 + (K_2)_1 \zeta_1 = D_2(x_1, x_2, x_3, \zeta_1)$$

尚未出现输入控制量,继续求导数

$$y_4^{(2)} = \frac{\partial D_2}{\partial x_1^T} (H_1 + K_1 \zeta_1) + \frac{\partial D_2}{\partial x_2^T} (H_2 + K_2 \zeta_1) + \frac{\partial D_3}{\partial x_3^T} (F_3 + G_3 w_2) + (K_2)_1 \zeta_2$$

已出现控制量 w_2 , 得 $r_4 = 2$ 。下面求矩阵 $A(x)$ 。对 $k=1$, 得

$$L_{g_1} h_4(x) = \frac{\partial (\dot{x}_2)_1}{\partial x_1^T} g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_4(x) = \frac{\partial (\dot{x}_2)_1}{\partial x_1^T} g_2(x) = 0$$

$$L_{g_3} h_4(x) = \frac{\partial (\dot{x}_2)_1}{\partial x_1^T} g_3(x) = 0$$

$$L_{g_4} h_4(x) = \frac{\partial (\dot{x}_2)_1}{\partial x_1^T} g_4(x) = 0$$

对 $k=2$, 计算

$$L_f h_4(x) = \frac{\partial (x_2)_1}{\partial x^T} f(x) = (H_2 + K_2 \zeta_1)_1$$

$$L_{g_1} L_f h_4(x) = \frac{\partial (H_2 + K_2 \zeta_1)_1}{\partial x^T} g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f h_4(x) = \frac{\partial (H_2 + K_2 \zeta_1)_1}{\partial x^T} g_2(x) = \frac{\partial (H_2 + K_2 \zeta_1)_1}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{31})_1 \\ (G_{31})_2 \\ (G_{31})_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial H_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{31})_1 \\ (G_{31})_2 \\ (G_{31})_3 \end{bmatrix}$$

$$L_{g_3} L_f h_4(x) = \frac{\partial (H_2 + K_2 \zeta_1)_1}{\partial x^T} g_3(x) = \frac{\partial H_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{32})_1 \\ (G_{32})_2 \\ (G_{32})_3 \end{bmatrix}$$

$$L_{g_4} L_f h_4(x) = \frac{\partial(H_2 + K_2 \zeta_1)_1}{\partial x^T} g_4(x) = \frac{\partial H_2}{\partial x_3^T} \begin{bmatrix} (G_{33})_1 \\ (G_{33})_2 \\ (G_{33})_3 \end{bmatrix}$$

最后得

$$A(x) = \begin{bmatrix} K_1 & \frac{\partial B_2}{\partial x_3} G_3 \\ 0 & \frac{\partial(H_2)_1}{\partial x_3} G_3 \end{bmatrix}$$

此矩阵,在扩充空间的 $V \neq 0, \theta = \psi = \varphi = \alpha = \beta = \zeta_1 = 0$ 的域的任何点上非奇异。系统在这些点上有向量相对阶 $\{3, 3, 3, 2\}$ 。

24.4.11 状态扩充后的系统

状态扩充后的系统见图 24-3。

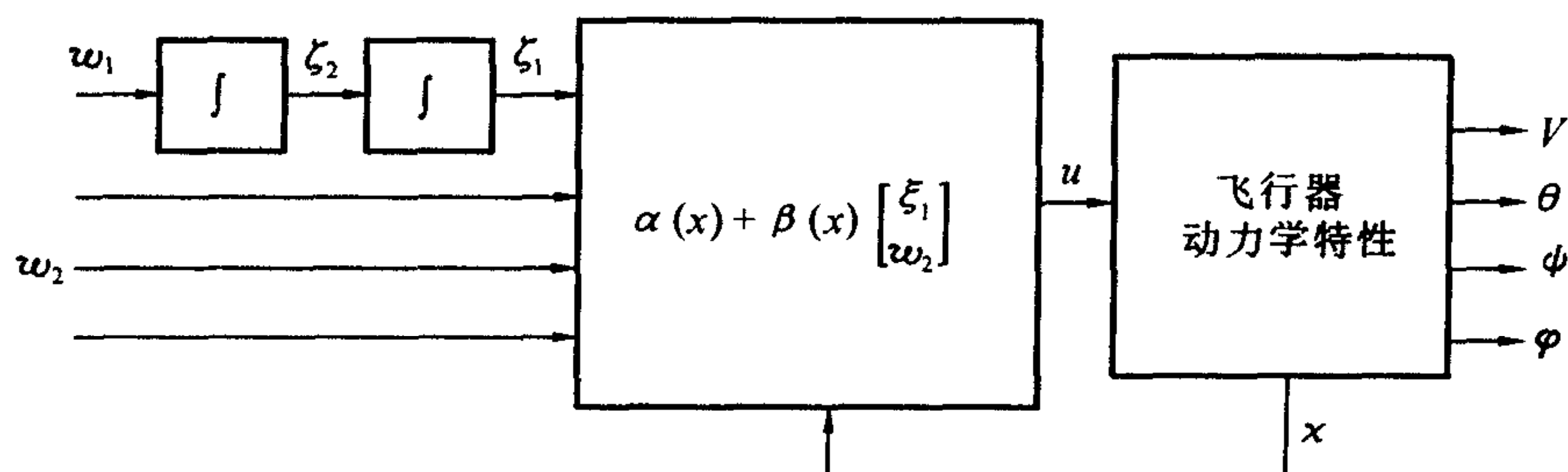


图 24-3 合成系统

动态扩充状态反馈可综合为

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_p \\ \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(G_1)_1(x_1, x_2)} (-(F_1)_1(x_1, x_2) + \zeta_1) \\ (w_2)_1 \\ (w_2)_2 \\ (w_2)_3 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha(x) + \beta(x) \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

式中

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \frac{-(F_1)_1}{(G_1)_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(G_1)_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

此动态反馈与原系统合成的新系统,对输出 $y = (V \ \theta \ \psi \ \varphi)^T$ 有相对阶,并且满足

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 11$$

24.4.12 扩充后系统化为线性能控系统

因为有相对阶存在并且满足条件 $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = n = 11$,所以扩充后的系统可通过适当的坐标变换和如图 24-4 的静态反馈变换为线性和能控的系统。

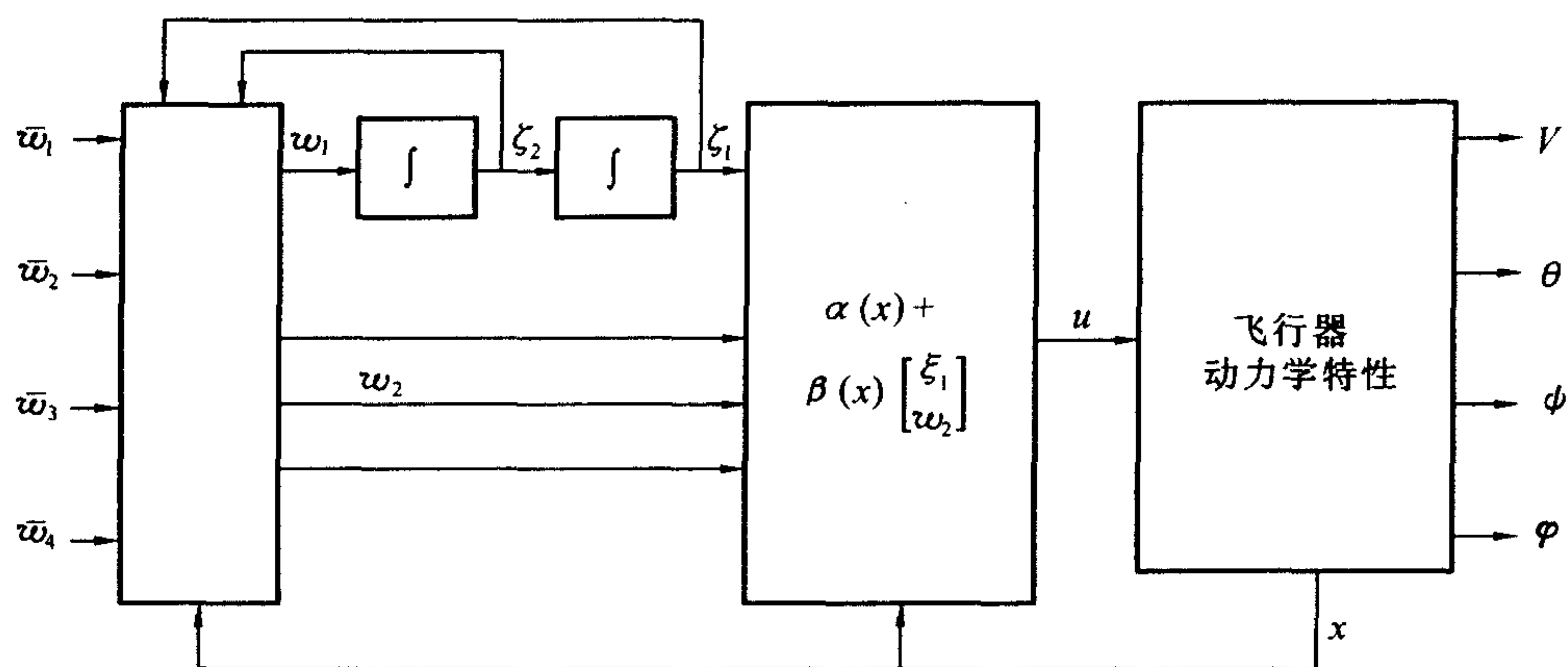


图 24-4 静态反馈

最后得到的线性能控系统如图 24-5。

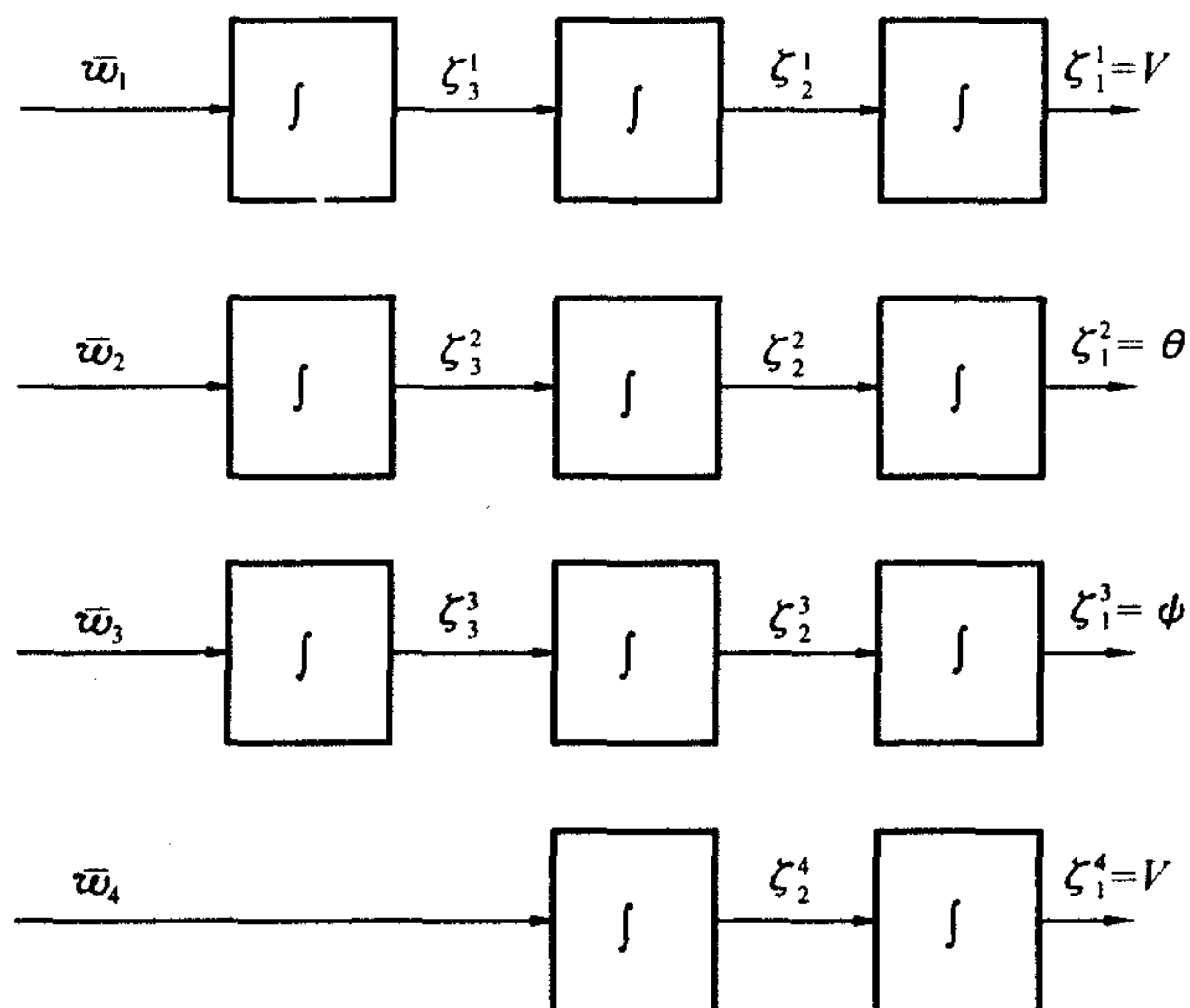


图 24-5 线性能控系统

24.5 多杆件机械手

24.5.1 与驱动器间有弹性耦合的机械手

在 19.2 节,已讨论过驱动器和杆件间有弹性耦合的单杆件机械手,表明有弹性耦合的单杆件机械手可以通过坐标变换和静态反馈被精确线性化。但是,一般地说,当机械手有两个或两个以上杆件,并且有弹性耦合时,只通过坐标变换和静态反馈同时实现精确线性化和

解耦将不可能,甚至不要求解耦也不可能。在此情况下,应采用动态反馈。对有两个或两个以上杆件并且有弹性耦合的机械手,采用动态反馈,可同时实现精确线性化和输入输出解耦。

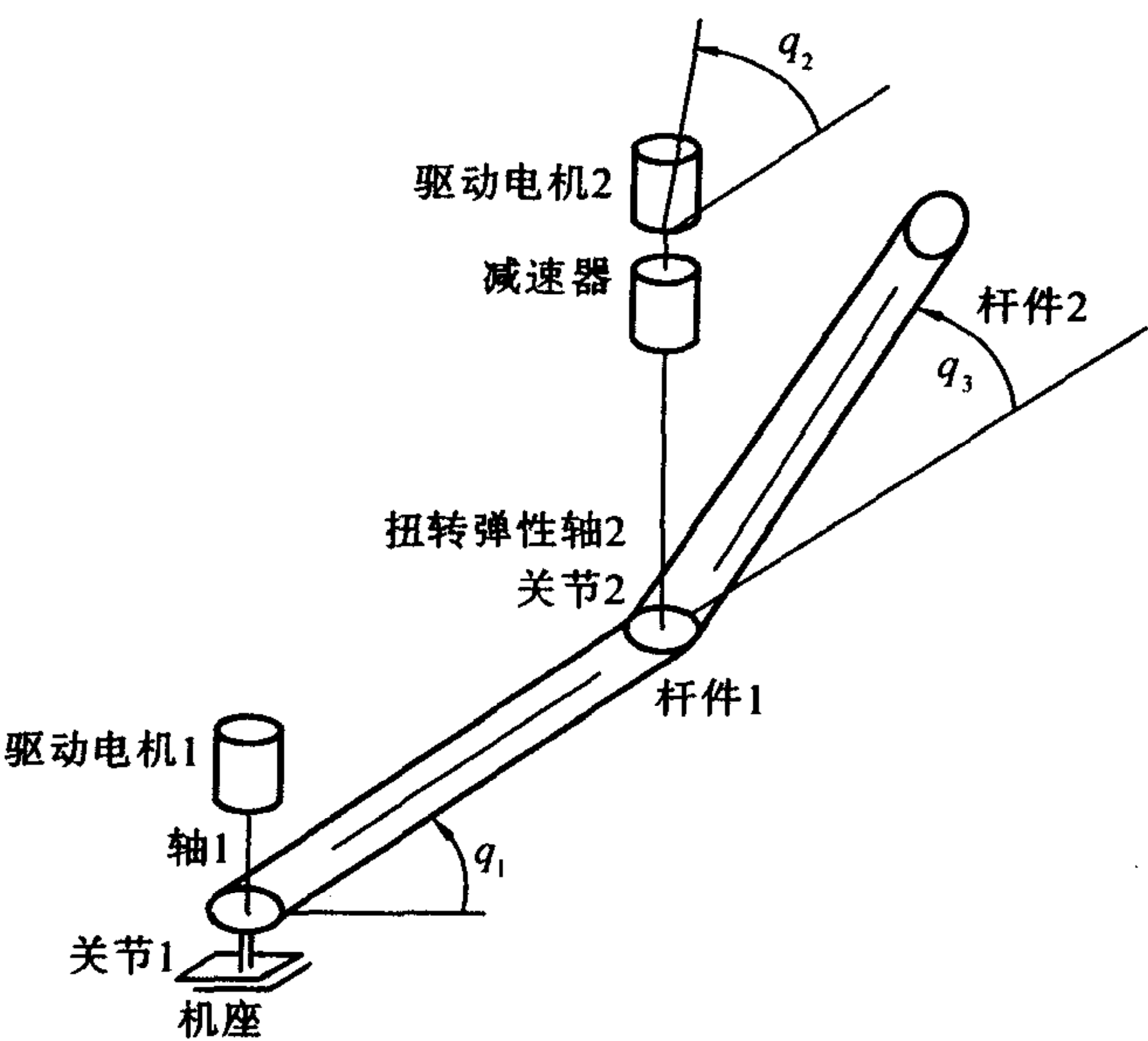


图 24-6 杆件与驱动轴弹性耦合的机械手

下面将以图 24-6 为例来说明如何通过动态反馈,使有两个或两个以上杆件,并且有弹性耦合的机械手,实现精确线性化和输入输出解耦,并说明其方法和过程。图 24-6 画的是一个处于水平面内的两杆件机械手。杆件 1 安装在机座上,可以在驱动电机 1 驱动下,绕非弹性轴 1(关节 1)旋转,其转角用 q_1 表示。杆件 2 以杆件 1 末端的关节 2 为轴旋转。杆件 2 相对杆件 1 的转角用 q_3 表示。杆件 1 末端装有驱动电机 2 和减速器。减速器的传动比为 N 。杆件 2 由驱动电机 2 经减速器驱动。驱动电机 2 至关节 2 的轴系有不可忽视的弹性,扭转弹性系数用单位 q_3 转角对应的力矩 K 表示。驱动电机 2 轴端转角用 q_2 表示。

24.5.2 系统动力学方程

本小节将从基本力学原理出发建立两关节机械手系统的动力学方程。只关注控制理论方面内容的读者,也可跳过本节前面一段,直接从最后结果式(25-70)读起。

首先,建立轴系 2 的力矩平衡方程。设电机输出轴端驱动力矩为 T_2 ,忽略轴系摩擦和减速器损失,折算到电机轴端的负载力矩为

$$T_{L2} = \frac{K}{N} \left(\frac{q_2}{N} - q_3 \right)$$

设整个轴系 2 折算到电机轴一侧的转动惯量为 J_{o2} ,设杆件 1,2 的角加速度分别为 \ddot{q}_1 和 \ddot{q}_2 。在固定坐标系下观察,可得到力矩平衡关系为

$$J_{o2} N (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = T_2 - \frac{K}{N} \left(\frac{q_2}{N} - q_3 \right) \tag{24-67}$$



其次,建立关节 2 的力矩平衡方程。关节 2 轴的驱动力矩是

$$T_3 = K \left(\frac{q_2}{N} - q_3 \right)$$

忽略轴系摩擦和杆件的空气阻力后,关节 2 轴上作用的力矩有切向惯性力矩、离心惯性力矩和哥氏力矩。

(1)切向惯性力矩。设杆件 1 长度为 L_1 , 杆件 2 的质量为 m_2 ,重心 G_2 到关节 2 轴的距离为 l_2 。杆件 2 重心切向加速度包括牵连加速度 $\epsilon_{t1} = l_1 \ddot{q}_1$ 和相对加速度 $\epsilon_{t2} = l_2 \ddot{q}_3$ 两部分。

①牵连加速度 $\epsilon_{t1} = l_1 \ddot{q}_1$ 部分。牵连加速度是 q_3 保持不变时, G_2 点随杆件 1 运动的加速度。通过把 $O_1 G_2$ 分解为 OB 和 BG_2 , 牵连加速度又可以分成 $(L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1$ 和 $l_2 \sin q_3 \ddot{q}_1$ 两个分量。两分量对应的惯性力,

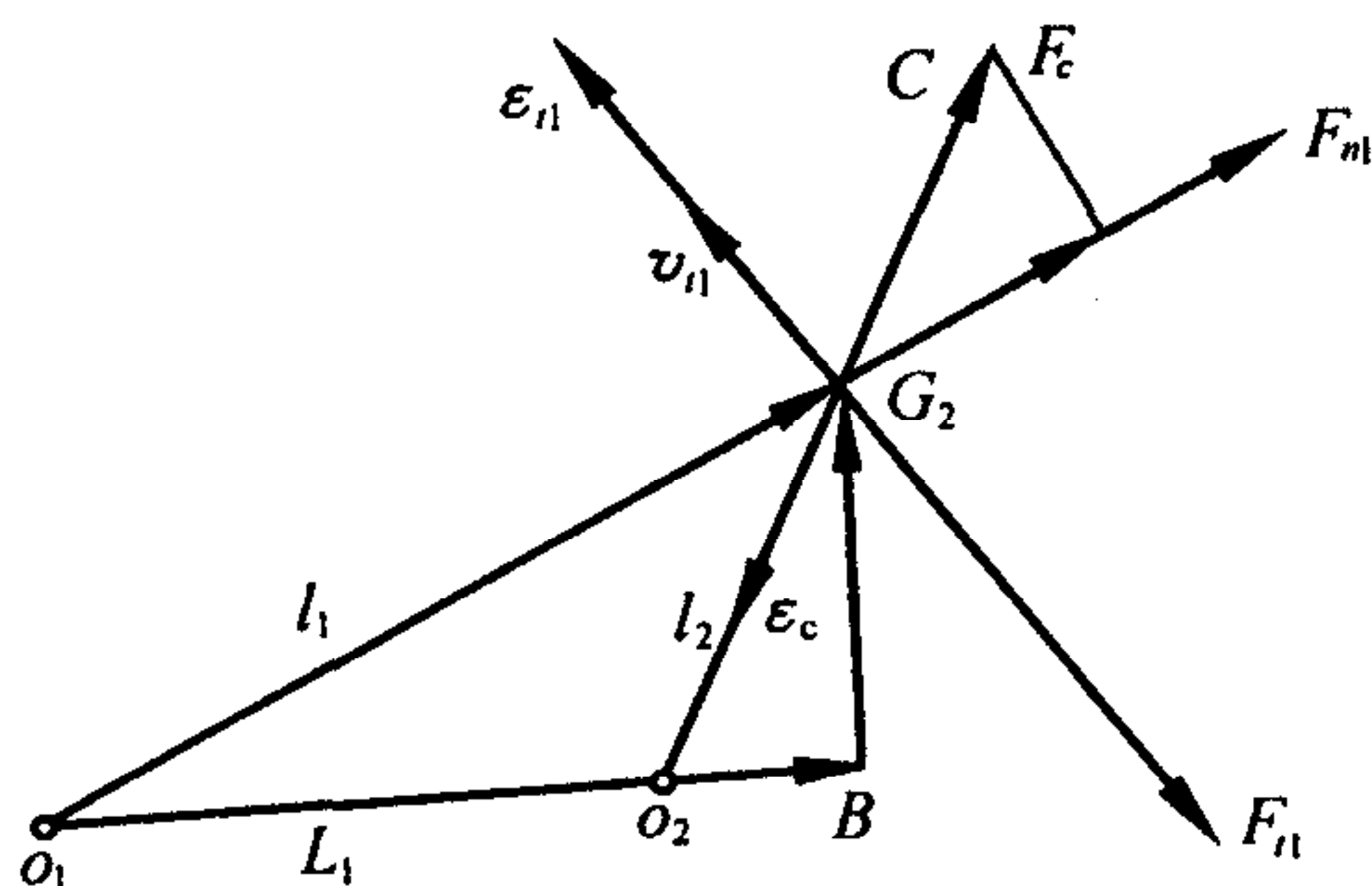


图 24-7 牵连运动的切向、离心方向和哥氏力方向

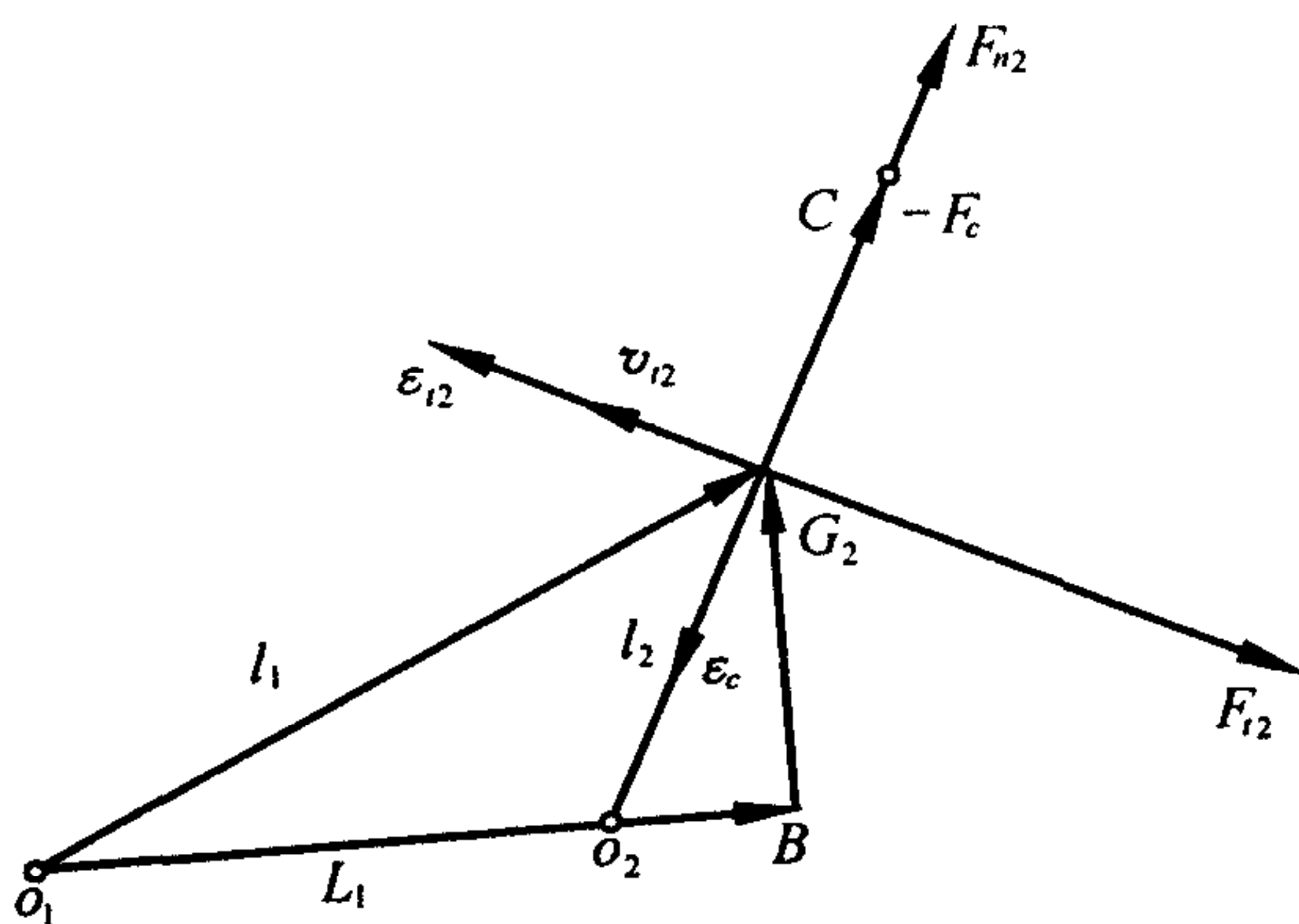


图 24-8 相对运动的切向、离心方向和哥氏力方向

分别为

$$F'_{t1} = -m_2 (L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1$$

$$F''_{t1} = -m_2 l_2 \sin q_3 \ddot{q}_1$$

对关节 2 轴心 O_2 的惯性力矩为

$$\begin{aligned} M_{t1} &= F'_{t1} \overline{O_2 B} + F''_{t1} \overline{G_2 B} = -m_2 (L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1 l_2 \cos q_3 - m_2 l_2^2 \sin^2 q_3 \ddot{q}_1 \\ &= -m_2 L_1 l_2 \cos q_3 \ddot{q}_1 - m_2 l_2^2 \ddot{q}_1 \end{aligned}$$

②相对加速度 $\epsilon_{t2} = l_2 \ddot{q}_3$ 部分。相对加速度是杆件 2 的重心绕关节 2 轴的相对加速度。相对加速度部分也可以分成 $(L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1$ 和 $l_2 \sin q_3 \ddot{q}_1$ 两个分量。两分量对应的惯性力分别为

$$F'_{t2} = -m_2 l_2 \cos q_3 \ddot{q}_3$$

$$F''_{t2} = -m_2 l_2 \sin q_3 \ddot{q}_3$$

对关节 2 轴心 O_2 的惯性力矩为

$$M_{i2} = F'_{i2} \overline{O_2 B} + F''_{i2} \overline{G_2 B} = -m_2 l_2^2 \cos^2 q_3 \ddot{q}_3 - m_2 l_2^2 \sin^2 q_3 \ddot{q}_3 = -m_2 l_2^2 \ddot{q}_3$$

把牵连加速度部分和相对加速度部分相加后,总切向惯性力矩为

$$M_i = M_{i1} + M_{i2} = -m_2 l_2^2 \ddot{q}_3 - m_2 l_2^2 \ddot{q}_1 - m_2 L_1 l_2 \cos q_3 \ddot{q}_1$$

(2)离心惯性力矩。杆件 2 重心切向速度,包括牵连速度 $v_{i1} = l_1 \dot{q}_1$ 和相对速度 $v_{i2} = l_2 \dot{q}_3$ 两部分。

①牵连速度 $v_{i1} = l_1 \dot{q}_1$ 部分。牵连速度是 q_3 保持不变时, G_2 点随杆件 1 运动的速度。对应的离心惯性力为 $F_{n1} = m_2 l_1 \dot{q}_1^2$ 。 F_{n1} 又可以分成

$$F'_{n1} = m_2 \dot{q}_1^2 \overline{O_1 B} = m_2 \dot{q}_1^2 (L_1 + l_2 \cos q_3)$$

$$F''_{n1} = m_2 \dot{q}_1^2 \overline{G_2 B} = m_2 \dot{q}_1^2 l_2 \sin q_3$$

对关节 2 轴心 O_2 的惯性力矩为

$$\begin{aligned} M_{n1} &= -F'_{n1} \overline{O_2 B} + F''_{n1} \overline{G_2 B} = m_2 \dot{q}_1^2 (L_2 + l_2 \cos q_3) l_2 \sin q_3 + m_2 \dot{q}_1^2 l_2^2 \sin^2 q_3 \\ &= -m_2 L_2 l_2 \sin q_3 \dot{q}_1^2 \end{aligned}$$

②相对速度 $v_{i2} = l_2 \dot{q}_3$ 部分。相对速度分量是杆件 2 重心绕关节 2 轴的相对速度。相对速度对应的惯性力为

$$F_{n2} = m_2 l_2 \dot{q}_3^2$$

因为此离心力通过关节 2 轴心,所以,它所产生的绕关节 2 轴的离心惯性力矩分量为

$$M_{n2} = 0$$

把牵连速度部分和相对速度部分相加后,总离心惯性力矩为

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} = -m_2 L_1 l_2 \sin q_3 \dot{q}_1^2$$

(3)哥氏力矩。哥氏加速度等于 $\epsilon_c = 2\dot{q}_1 \times \dot{q}_3 l_2$ 。哥氏力 $F_c = m_2 \epsilon_c$ 。因为它通过关节 2 轴心,所以对关节 2 轴的力矩为零。

综上,关节 2 的力矩平衡方程可写成

$$(m_2 l_1^2 + m_2 L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_3 + m_2 L_1 l_2 \sin q_3 \dot{q}_1^2 = K \left(\frac{q_2}{N} - q_3 \right) \quad (24-68)$$

最后,建立关节 1 的力矩平衡方程。设驱动电机 1 输出轴轴端驱动力矩为 T_1 ,设杆件 1 本身,再加上安装在其两端的驱动电机系统的运动部分,其总转动惯量为 J_1 。忽略轴系摩擦和杆件的空气阻力后,关节 1 轴上作用的力矩有切向惯性力矩、离心惯性力矩和哥氏力矩。

(1)杆件 1 的切向惯性力矩。其值为 $-J_1 \ddot{q}_1$ 。

(2)电机 2 及其轴系的切向惯性力矩。其值为

$$-J_{o2} N^2 \frac{\ddot{q}_2}{N} = -J_{o2} N \ddot{q}_2$$

(3)杆件 2 重心切向加速度。杆件 2 重心切向加速度包括牵连加速度 $\epsilon_{i1} = l_1 \ddot{q}_1$ 和相对加速度 $\epsilon_{i2} = l_2 \ddot{q}_3$ 两部分。

①牵连加速度 $\epsilon_{i1} = l_1 \ddot{q}_1$ 部分。牵连加速度部分可以分成 $(L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1$ 和 $l_2 \sin q_3 \ddot{q}_1$ 两个分量。两分量对应的惯性力,分别为

$$F'_{i1} = -m_2 (L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1$$

$$F''_{i1} = -m_2 l_2 \sin q_3 \ddot{q}_1$$

对关节 1 轴心 O_1 的惯性力矩为

$$\begin{aligned} M_{i1} &= F'_{i1} \overline{O_2 B} + F''_{i1} \overline{G_2 B} = -m_2 (L_1 + l_2 \cos q_3)^2 \ddot{q}_1 l_2 - m_2 l_2^2 \sin^2 q_3 \ddot{q}_1 \\ &= -m_2 (L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1 \end{aligned}$$

②相对加速度 $\epsilon_{i2} = l_2 \ddot{q}_3$ 部分。相对加速度是杆件 2 重心绕关节 2 轴的相对加速度。相对加速度部分也可以分成 $(L_1 + l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1$ 和 $l_2 \sin q_3 \ddot{q}_1$ 两个分量。两分量对应的惯性力,分别为

$$\begin{aligned} F'_{i2} &= -m_2 l_2 \cos q_3 \ddot{q}_3 \\ F''_{i2} &= -m_2 l_2 \sin q_3 \ddot{q}_3 \end{aligned}$$

对关节 1 轴心 O_1 的惯性力矩为

$$\begin{aligned} M_{i2} &= F'_{i2} \overline{O_1 B} + F''_{i2} \overline{G_2 B} = -m_2 l_2 \cos q_3 \ddot{q}_3 (L_1 + l_2 \cos q_3) - m_2 l_2^2 \sin^2 q_3 \ddot{q}_3 \\ &= -m_2 (l_2^2 + L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_3 \end{aligned}$$

把牵连加速度部分和相对加速度部分相加后,得总切向惯性力矩为

$$M_t = M_{i1} + M_{i2} = -m_2 (L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_1 - m_2 (l_2^2 + L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_3$$

(4)总切向惯性力矩。包括杆件 1、杆件 2 和两驱动电机以及两关节轴,总的切向惯性力矩为

$$- [J_1 - m_2 (L_1^2 + l_2^2) + 2m_2 L_1 l_2 \cos q_3] \ddot{q}_1 - J_{o2} N \ddot{q}_2 - (m_2 l_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_3$$

(5)杆件 2 的离心惯性力矩。杆件 2 重心切向速度,包括牵连速度 $v_{t1} = l_1 \dot{q}_1$ 和相对速度 $v_{t2} = l_2 \dot{q}_3$ 两部分。

①牵连速度 $v_{t1} = l_1 \dot{q}_1$ 部分。牵连速度是 q_3 保持不变时, G_2 点随杆件 1 运动的速度。对应的离心惯性力为 $F_{n1} = m_2 l_1 \dot{q}_1^2$ 。因为通过 O_1 点,所以对关节 2 轴心 O_1 的惯性力矩为

$$M_{n1} = 0$$

②相对速度 $v_{t2} = l_2 \dot{q}_3$ 部分。相对速度分量是杆件 2 重心绕关节 2 轴的相对速度。相对速度对应的惯性力为

$$F_{n2} = m_2 l_2 \dot{q}_3^2$$

F_{n2} 又可以分成

$$\begin{aligned} F'_{n2} &= m_2 l_2 \sin q_3 \dot{q}_3^2 \\ F''_{n2} &= m_2 l_2 \cos q_3 \dot{q}_3^2 \end{aligned}$$

对关节 1 轴心 O_1 的惯性力矩为

$$\begin{aligned} M_{n2} &= -F'_{n2} \overline{O_2 B} + F''_{n2} \overline{G_2 B} = m_2 l_2 \sin q_3 \dot{q}_3^2 (L_1 + l_2 \cos q_3) - m_2 l_2^2 \dot{q}_3^2 \sin q_3 \cos q_3 \\ &= m_2 L_1 l_2 \sin q_3 \dot{q}_3^2 \end{aligned}$$

把牵连速度部分和相对速度部分相加后,总离心惯性力矩为

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} = -m_2 L_1 l_2 \sin q_3 \dot{q}_3^2$$

(6)杆件 2 的哥氏力矩。哥氏加速度向量 ϵ_c 和角速度向量 \dot{q}_1, \dot{q}_3 间的关系是 $\epsilon_c = 2\dot{q}_1 \times \dot{q}_3 l_2$ 。 ϵ_c 的大小为 $\epsilon_c = 2l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3$ 。与哥氏加速度 ϵ_c 对应的哥氏力为 F_c 。 F_c 与 ϵ_c 方向相同。 F_c 的大小为 $F_c = 2m_2 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3$ 。哥氏力 F_c 可以分成 $F_c \sin q_3$ 和 $F_c \cos q_3$ 两个分量,其大小为

$$\begin{aligned} F'_c &= m_2 \epsilon_c \sin q_3 \\ F''_c &= m_2 \epsilon_c \cos q_3 \end{aligned}$$

和所受其它作用力一样,如果把哥氏力也视为惯性力,其方向应取相反方向。考虑到此方向问题后,可求得哥氏力对关节 1 轴心 O_1 的惯性力矩为

$$\begin{aligned} M_c &= F'_c (L_1 + l_2 \cos q_3) - F'_c l_2 \sin q_3 \\ &= F_c L_1 l_2 \sin q_3 = 2m_2 L_1 l_2 \sin q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

综上(1)至(6),得关节 1 的力矩平衡方程为

$$\begin{aligned} [J_1 - m_2(L_1^2 + l_2^2) + 2m_2 L_1 l_2 \cos q_3] \ddot{q}_1 + J_{o2} N \ddot{q}_2 + (m_2 l_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos q_3) \ddot{q}_3 \\ - m_2 L_1 l_2 \sin q_3 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2) = T_1 \end{aligned} \quad (24-69)$$

把以上三个力矩平衡方程结果集中写在一起,为简化表示,令

$$A_1 = J_1 - m_2(L_1^2 + l_2^2) \quad A_2 = m_2 l_2^2 \quad A_3 = m_2 L_1 l_2 \quad A_4 = J_{o2} N$$

这里 $A_1 \sim A_4$ 都是与器件质量分布等有关的参数,替换后可得到如下的以变量 q_1, q_2, q_3 的微分方程表示的两杆件机械手动力学方程。

$$\begin{aligned} (A_1 + 2A_3 \cos q_3) \ddot{q}_1 + A_4 \ddot{q}_2 + (A_2 + A_3 \cos q_3) \ddot{q}_3 \\ - A_3 \sin q_3 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2) = T_1 \end{aligned} \quad (24-70a)$$

$$A_4 \ddot{q}_1 + A_4 \ddot{q}_2 + \frac{K}{N} \left(\frac{q_2}{N} - q_3 \right) = T_2 \quad (24-70b)$$

$$(A_2 + A_3 \cos q_3) \ddot{q}_1 + A_2 \ddot{q}_3 + A \sin q_3 \dot{q}_1^2 - K \left(\frac{q_2}{N} - q_3 \right) = 0 \quad (24-70c)$$

动力学方程可表示为向量形式

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + r(q) = T \quad (24-71)$$

式中

$$q = (q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$$

$B(q)$ ——惯量阵,一个 3×3 对称正定阵。

$$B(q) = \begin{bmatrix} A_1 + 2A_3 \cos q_3 & A_4 & A_2 + A_3 \cos q_3 \\ A_4 & A_4 & 0 \\ A_2 + A_3 \cos q_3 & 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (24-72)$$

$C(q, \dot{q})$ ——与哥氏力和离心力有关的力矩向量。

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -A_3 \sin q_3 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2) \\ 0 \\ A_3 \sin q_3 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (24-73)$$

$r(q)$ ——稳态力矩向量。

$$r(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K}{N} \left(q_3 - \frac{q_2}{N} \right) \\ K \left(q_3 - \frac{q_2}{N} \right) \end{bmatrix} \quad (24-74)$$

T ——控制(驱动)力矩。

$$T = (u_1 \quad u_2 \quad 0)^T \quad (24-75)$$

24.5.3 状态方程

选择状态变量

$$x = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3)^T$$

控制量

$$u = (u_1 \quad u_2)^T = (T_1 \quad T_2)^T$$

得状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) \\ f_5(x_2, x_3, x_4, x_6) \\ f_6(x_2, x_3, x_4, x_6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{41}(x_3) & -g_{41}(x_3) \\ g_{51}(x_3) & g_{52}(x_3) \\ g_{61}(x_3) & -g_{61}(x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24-76)$$

输出选为

$$y_1 = h_1(x) = x_1 = q_1 \quad (24-77a)$$

$$y_2 = h_2(x) = x_3 = q_3 \quad (24-77b)$$

24.5.4 系统的相对阶

对 $k=0$, 计算

$$L_{g_1} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1(x) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_2(x) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_1(x) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_2(x) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) g_2(x) = 0$$

对 $k=1$, 计算

$$L_f h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) f(x) = x_4$$

$$L_f h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} f(x) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) f(x) = x_6$$

$$L_{g_1} L_f h_1(x) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) g_1(x) = g_{41}(x_3)$$

$$L_{g_2} L_f h_1(x) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) g_2(x) = -g_{41}(x_3)$$

$$L_{g_1} L_f h_2(x) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) g_1(x) = g_{61}(x_3)$$

$$L_{g_2} L_f h_2(x) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) g_2(x) = -g_{61}(x_3)$$

得 $r_1 = r_2 = 2$ 和

$$A(x) = L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} g_{41}(x_3) & -g_{41}(x_3) \\ g_{61}(x_3) & -g_{61}(x_3) \end{bmatrix}$$

因为对所有 x 而言, $A(x)$ 都不满秩, 系统无相对阶。

24.5.5 第一次动态扩充

取 $i_0=1, j_0=1$ 。因为 $r_1=r_2=2$, 所以

$$\begin{aligned} p(x) &= -L_{f_0}^r h_{i_0}(x) = -L_{f_1}^2 h_1(x) = -\frac{\partial x_4}{\partial x} f(x) \\ &= -(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) f(x) = -f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) \\ q(x) &= 1 \end{aligned}$$

按动态扩充公式式(24-7), 有

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{a_{11}(x)} (p(x) + q(x) \zeta_1 - a_{12}(x) v_2) \\ &= \frac{1}{g_{41}(x_3)} (-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1 + g_{41}(x_3) v_2) \\ &= \frac{1}{g_{41}(x_3)} (-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) + v_2 \\ u_2 &= v_2 \\ \dot{\zeta}_1 &= v_1 \end{aligned}$$

把 u_1, u_2 代入系统原状态方程, 并把状态变量扩充为

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ \zeta_1]^T$$

得到第一次动态扩充后的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \zeta_1 \\ f_5(x_2, x_3, x_4, x_6) + \frac{g_{51}(x_3)}{g_{41}(x_3)} (-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) \\ f_6(x_2, x_3, x_4, x_6) + \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} (-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1 \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_{51}(x_3) + g_{52}(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_2 \end{aligned} \quad (24-78)$$

24.5.6 再次求相对阶

对 $k=0$, 计算

$$L_{g_1} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_2(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_1(x) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_2(x) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

对 $k=1$, 计算

$$L_f h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) f(x) = x_4$$

$$L_f h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) f(x) = x_6$$

$$L_{g_1} L_f h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} L_f h_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f h_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) g_2(x) = 0$$

对 $k=2$, 计算

$$L_f^2 h_1(x) = \frac{\partial L_f h_1}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) f(x) = \zeta_1$$

$$L_f^2 h_2(x) = \frac{\partial L_f h_2}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) f(x)$$

$$= f_6(x_2, x_3, x_4, x_6) + \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} (-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1)$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) g_1(x) = 1$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_2(x) = \left(0 \ * \ * \ * \ 0 \ * \ \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} \right) g_1(x) = \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)}$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_2(x) = (0 \ * \ * \ * \ 0 \ * \ *) g_2(x) = 0$$

得 $r_1 = r_2 = 3$ 和

$$A(x) = L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} & 0 \end{bmatrix}$$

因为对所有 x 而言, $A(x)$ 都不满秩, 所以系统无相对阶。

24.5.7 再次动态扩充

取 $i_0 = 1, j_0 = 1$ 。因为 $r_1 = r_2 = 3$, 所以

$$p(x) = -L'_{j_0} h_{i_0}(x) = -L_f^3 h_1(x) = -\frac{\partial L_f^2 h_1}{\partial x} f(x) = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} f(x)$$

$$= -(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) f(x) = 0$$

$$q(x) = 1$$

按动态扩充公式式(24-7)

$$v_1 = \frac{1}{a_{11}(x)}(p(x) + q(x)\zeta_2 - a_{12}(x)v_2) = \zeta_2$$

$$v_2 = w_2$$

$$\dot{\zeta}_2 = w_1$$

把 v_1, v_2 代入系统原状态方程并把状态变量扩充为

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ \zeta_1 \ \zeta_2]^T$$

得到第二次动态扩充后的状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \zeta_1 \\ f_5(x_2, x_3, x_4, x_6) + \frac{g_{51}(x_3)}{g_{41}(x_3)}(-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) \\ f_6(x_2, x_3, x_4, x_6) + \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)}(-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_{51}(x_3) + g_{52}(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_2 \quad (24-79)$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1 = q_1 \quad (24-80a)$$

$$y_2 = h_2(x) = x_3 = q_3 \quad (24-80b)$$

24.5.8 最后一次求相对阶

对 $k=0$, 计算

$$L_{g_1} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_2(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_1(x) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_2(x) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

对 $k=1$, 计算

$$L_f h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) f(x) = x_4$$

$$L_f h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) f(x) = x_6$$

$$L_{g_1} L_f h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} L_f h_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f h_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

对 $k=2$, 计算

$$L_f^2 h_1(x) = \frac{\partial L_f h_1}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) f(x) = \zeta_1$$

$$\begin{aligned} L_f^2 h_2(x) &= \frac{\partial L_f h_2}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) f(x) \\ &= f_6(x_2, x_3, x_4, x_6) + \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} (-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) \end{aligned}$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_2(x) = \left(0 \ * \ * \ * \ 0 \ * \ \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} \ 0 \right) g_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_2(x) = (0 \ * \ * \ * \ 0 \ * \ * \ 0) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_2} L_f h_2(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) g_2(x) = 0$$

对 $k=3$, 计算

$$L_f^3 h_1(x) = \frac{\partial L_f^2 h_1}{\partial x} f(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) f(x) = \zeta_2$$

$$L_f^3 h_2(x) = \frac{\partial L_f^2 h_2}{\partial x} f(x) = \left(0 \ \frac{\partial L_f^2 h_2}{\partial x_2} \ * \ * \ 0 \ * \ * \ 0 \right) f(x)$$

$$L_{g_1} L_f^3 h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) g_1(x) = 1$$

$$L_{g_2} L_f^3 h_1(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) g_2(x) = 0$$

$$L_{g_1} L_f^3 h_2(x) = (0 \ * \ * \ * \ 0 \ * \ * \ 0) g_1(x) = 0$$

$$\begin{aligned} L_{g_2} L_f^3 h_2(x) &= \left(0 \ * \ * \ * \ \frac{\partial L_f^2 h_2}{\partial x_2} \ * \ * \ 0 \right) g_2(x) = \frac{\partial L_f^2 h_2}{\partial x_2} (g_{51}(x_3) + g_{52}(x_3)) \\ &= \left(\frac{\partial f_6(x_2, x_3, x_4, x_6)}{\partial x_2} - \frac{g_{61}(x_3)}{g_{41}(x_3)} \frac{\partial f_4(x_2, x_3, x_4, x_6)}{\partial x_2} \right) \\ &\quad \cdot (g_{51}(x_3) + g_{52}(x_3)) \end{aligned}$$

得 $r_1 = r_2 = 4$ 和

$$A(x) = L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial f_6}{\partial x_2} - \frac{g_{61}}{g_{41}} \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right) (g_{51} + g_{52}) \end{bmatrix} \quad (24-81)$$

因为 $A(x)$ 满秩, 所以系统有相对阶 $\{r_1, r_2\} = \{4, 4\}$ 。把两次动态扩充结果综合在一起, 得到总扩充为

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{g_{41}(x_3)}(-f_4(x_2, x_3, x_4, x_6) + \zeta_1) + w_2 \\
 u_2 &= w_2 \\
 \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\
 \dot{\zeta}_2 &= w_1
 \end{aligned}
 \tag{24-82}$$

因为扩充后的系统满足 $r_1 + r_2 = n = 8$, 所以可得结论: 借助另外的附加静态反馈总系统可进一步变换为适当坐标下的线性的和能控制的系统。

索引

A		点能观	55
B		点能控	52
Brunovsky 标准形	146	动态状态反馈控制	201
变量捆绑技巧	192	对合	30
标准非交互反馈	264	对合闭包	32
不变对偶分布	38	对偶分布	32
不变分布	36	对偶分布的包含	32
不变最大分布	44	对偶分布的并	32
不变最小对偶分布	44	对偶分布的不变性	38
不变最小分布	40	对偶分布的光滑性	33
不变最小对偶分布的生成序列	41	对偶分布的交	32
不变最小分布的生成序列	45	对偶分布的零化子	35
部分线性化系统结构图	162	对偶分布的奇异点	32
部分状态可达点	51	对偶分布的奇异性	32
部分状态可区分点	54	对偶分布的属于	32
部分状态能观	55	对偶分布的维数	32
部分状态能控	52	对偶分布的正则点	32
不可达状态	51	对偶分布记号 $L_f\Omega$	38
不可区分状态	54	对偶基	4
不能观状态	55	对偶空间	3
不能控状态	52	对偶向量	3
C		对偶向量场	21
C^∞ 分布	28	对偶向量场的李导数	22
$C^\infty(N)$ 集合	1	对偶向量的逆向映射	12
C^∞ 对偶分布	33	对偶向量场光滑	22
$C^\infty(p)$ 集合	1	多人多出系统的相对阶	238
C^∞ 类函数	1	多人多出系统的正则形式	242
D		多人多出系统的准正则形式	242
$d\lambda _p$ 向量	5	E	
点不可区分	55	F	
点局部能观	55	Frobenius 定理	66
		$[f, \Delta]$	36

M		R 切向量的映射	9
m 入 m 出系统线性化结构框图	263	弱可达点	53
N		弱能观	56
能观状态	55	弱能控	53,111
能观性秩条件	119	S	
能控状态	52	$\text{smt}(\Delta)$ 分布	28
能控不变子空间	42	span	26
能控性秩条件	112	Sussmann 定理	105
逆系统	181	上三角结构	80
O		输出扰动解耦控制问题	202
P		输出在输入下的不变性	122
P 分布	87	输入-输出线性化	161,262
剖分为 $d+1$ 维薄片	94	输入-状态线性化	160
剖分为 r 维薄片	94	T	
平凡维规范化动态扩充	290	$T(N)$ 集合	14
平衡点	148,163,242	$T_p N$ 集合	3
Q		$T_p^* N$ 集合	2
Q 分布	96	U	
奇异点	27,32	V	
切空间	3	$V(N)$ 集合	19
切空间的基底	3	W	
切向量	1	$WR(x^0)$	53
切向量的映射	6	外部线性化	161,262
切向量向 R 切方向的映射	9	微分流形	2
全局微分同胚	57	X	
全微分对偶向量	5	系统局部能控	52
全微分对偶向量场	22	系统局部能观	55
全状态不可区分	54	系统全状态局部能控	52
全状态局部能控	52	系统全状态能控	52
全状态可达点	51	线性近似式	158
全状态能控	52	相对阶	129
R		相对阶在状态反馈下不变	151
$R(x^0)$	51	相对阶在坐标变换下不变	136
$R_U(x^0)$	52	相对阶最大化问题	164
R 分布	87		

参考文献

- [1] Isidori A. Nonlinear Control Systems. 2nd ed. Springer-Verlag World Publishing Corp. , 1989
- [2] Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. Springer-Verlag World Publishing Corp. , 1995
- [3] Isidori A. Nonlinear Control Systems. 1st ed. Springer-Verlag World Publishing Corp. , 1985
- [4] Isidori A. Nonlinear Control Systems II. Springer-Verlag World Publishing Corp. , 1999
- [5] 卢强,孙元章. 电力系统非线性控制. 北京:科学出版社,1993
- [6] Lu Q, Sun Y, Mei S. Nonlinear Control Systems and Power System Dynamics. Kluwer Academic Publishers, 2001
- [7] Hassan K K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Prentice-Hall, 2002
- [8] Hassan K K. 非线性系统. 朱义胜等译. 北京:电子工业出版社, 2005
- [9] 郑大中. 线性系统理论. 北京:清华大学出版社, 1990
- [10] 程代展,秦化淑. 非线性系统的几何方法(上). 控制理论与应用, 1987, 4(1)
- [11] 郑大中. 线性系统理论. 第2版. 北京:清华大学出版社, 2002
- [12] 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京:科学出版社, 1989
- [13] 程代展,秦化淑. 非线性系统的几何方法(下). 控制理论与应用, 1987, 4(2)
- [14] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京:科学出版社, 1988
- [15] 程代展,冯德兴. 控制理论导论. 北京:科学出版社, 2005
- [16] 洪奕光,程代展. 非线性系统的分析与控制. 北京:科学出版社, 2005
- [17] 韩京清,许可康. 线性控制系统理论——构造性方法. 北京:科学出版社, 2001
- [18] 夏小华,高为炳. 非线性系统的最小阶动态解耦. 中国科学 A 辑, 1989(19): 1102~1110
- [19] 夏小华,高为炳. 非线性系统控制及解耦. 北京:科学出版社, 1993
- [20] Jean-Jacques E S, Li W. Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall. , 1991
- [21] 曹建福,韩崇昭,方洋旺. 非线性系统理论及应用. 西安:西安交通大学出版社, 2001
- [22] 胡耀明. 非线性控制系统理论与应用. 北京:国防工业出版社, 2002
- [23] 李殿璞. 电力系统励磁控制问题精确线性化方法研究. 哈尔滨工程大学学报, 2006, 27(1)
- [24] 李殿璞. 多机电力系统励磁控制问题精确线性化方法研究. 哈尔滨工程大学学报, 2006, 27(2)
- [25] Ballieul J. Controllability and observability of polynomial systems. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Application, 1981, 5(5): 543~552
- [26] Battilotti S. A sufficient condition for nonlinear noninteracting control with stability via dynamic state feedback. IEEE Trans. Aut. Contr. , 1991, AC-36(9): 1033~1045
- [27] Baumann W T, Rugh W J. Feedback control of nonlinear systems by extended

- linearization. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1986,AC-31(1):40~46
- [28] Byrnes C I, Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1991,AC-36(10):1122~1137.
- [29] Cheng C, Tarn T J, Isidori A. Global external linearization of nonlinear systems via feedback. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1985,AC-30(8):808~811
- [30] Crouch P. Spacecraft attitude control and stabilization. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1984,AC-29(4):321~331
- [31] Descusse J, Moog C H. Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems. Int. J. Control, 1985,42(6):1387~1398
- [32] Di Benedetto M D, Isidori A. The matching of nonlinear models via dynamic state feedback. SIAM J. Control and Optimization, 1986,24(5):1063~1075
- [33] Freund E. The structure of decoupled nonlinear systems. Int. J. Control, 1975,21(3):443~450
- [34] Gauthier J P, Bornard G. Observability for a class of nonlinear systems. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1981,AC-26(4):922~926
- [35] Hepburn J S A, Wonham W M. Error feedback and internal models on differentiable manifolds. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1984,AC-29(5):397~403
- [36] Hunt L R, Su R, Meyer G. Global Transformations of nonlinear systems. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1983,AC-28(1):24~31
- [37] Isidori A, Krener A J. Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1981,AC-26(2):331~345
- [38] Isidori A, Moog C H. A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback. 1986, IEEE 25th Conf. on Decision and Control:203~208
- [39] Khalil H, Saberi A. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using-high feedback. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1987,AC-32(9):1031~1035
- [40] Khalil H, Farzad E. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1993,AC-38(9):1412~1415
- [41] Lane S H, Stengel R F. Flight control design using non-linear inverse dynamics. Automatica, 1988,24(4):471~483
- [42] Marino R, Respondek W. Almost disturbance decoupling for single-input single-output nonlinear systems. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1989,AC-34(9):1013~1017
- [43] Nijmeijer H, Respondek W. Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems. Trans. Aut. Contr. ,1988,AC-33(11):1065~1069
- [44] Schaft. Observability and controllability for smooth nonlinear systems, SIAM J. Control and Optimization, 1982,20(3):338~354
- [45] Sontag E D. Controllability and linearized regulation. IEEE Trans. Aut. Contr. ,1987,AC-32(10):877~888
- [46] Xia Xiao-hua and Gao Wei-bin. Nonlinear observer design by observer error linearization, SIAM J. Control and Optimization, 1989,27(1):199~216

作者简介

李殿璞 男,汉族,1934年12月生。1960年毕业于中国人民解放军军事工程学院。现任哈尔滨工程大学教授,博士生导师。出版著作5本。发表论文130多篇。1972年起历时13年主持国家重点国防和海洋开发项目“深潜艇联合推进控制器”的研究,1982年“深潜救生艇推进逆变器”获国务院国防工办授予的重要国防科技成果三等奖;1985年“深潜艇充油承压推进逆变器”获国家科技进步三等奖。1985至1989年主持黑龙江省科委节能项目“动态功率因数补偿装置”的研究,1989年和2005年获两项国家专利,1994年获黑龙江省科技进步二等奖。1985至1994年主持完成的“深潜艇推进控制器的设计理论和控制理论”,1994年获中国船舶工业总公司科技进步二等奖。1990年创建了国内“船舶与海洋工程特辅装置与系统”学科国内第一个博士点,成为该学科首位博士生导师。1997年该学科更名为“控制理论与控制工程”。作为该学科带头人,为该学科申报,并最终得以被批准为国家“211工程”重点建设学科作出了重要贡献。至今,已培养硕士研究生35名,博士研究生22名,博士后2名。1994年被授予中船总公司系统优秀教师称号。1998年被授予全国优秀教师称号。